KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Buku Panduan Guru
Matematika
Tingkat Lanjut



Al Azhary Masta, dkk

SMA KELAS XI

Disclaimer: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini digunakan secara terbatas pada Sekolah Penggerak. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI

Penulis
Al Azhary Masta
Yosep Dwi Kristanto
Elyda Yulfiana
Muhammad Taqiyuddin

Penelaah
Sunardi
Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
Tri Handoko Seto
E. Oos M. Anwas
Dinda

Ilustrator
Yol Yulianto

Penyunting
Seni Asiati

Penata Letak (Desainer)
Suhardiman

Penerbit
Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Komplek Kemdikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Cetakan pertama, 2021
ISBN 978-602-244-772-6 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-602-244-773-3 (jil.1)

Isi buku ini menggunakan huruf Linux Libertine, 12/24 pt., SIL International .
viii, 288 hlm. : 17,6 × 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi mempunyai tugas dan fungsi di antaranya adalah mengembangkan kurikulum yang mengusung semangat merdeka belajar mulai dari satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan pendidikan dalam mengembangkan potensi yang dimiliki oleh peserta didik. Untuk mendukung pelaksanaan kurikulum tersebut, sesuai Undang-Undang Nomor 3 tahun 2017 tentang Sistem Perbukuan, pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan memiliki tugas menyiapkan buku teks utama sebagai salah satu sumber belajar utama pada satuan pendidikan.

Penyusunan buku teks utama mengacu pada Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Dalam upaya menyediakan buku-buku teks utama yang berkualitas, selain melakukan penyusunan buku, Pusat Perbukuan juga membeli hak cipta atas buku-buku teks utama dari Penerbit asing maupun buku-buku teks utama dari hasil hibah dalam negeri, untuk disadur disesuaikan dengan Capaian Pembelajaran/Kurikulum yang berlaku. Penggunaan buku teks utama pada satuan pendidikan ini dilakukan secara bertahap pada Sekolah Penggerak sebagaimana diktum Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 162/M/2021 tentang Program Sekolah Penggerak.

Sebagai dokumen hidup, buku teks utama ini secara dinamis tentunya dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan. Semoga buku ini dapat bermanfaat, khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran..

Jakarta, Oktober 2021
Plt. Kepala Pusat,

Supriyatno

NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Mahakuasa karena atas berkat-Nya, kami telah menyelesaikan buku ini. Buku ini merupakan bentuk kontribusi kami dalam mendampingi Bapak/Ibu Guru untuk merancang dan mengelola pembelajaran matematika. Semoga dengan buku ini, pembelajaran matematika dapat membentuk peserta didik menjadi pribadi yang utuh, cakap dalam bidang matematika maupun cakap dalam kompetensi-kompetensi lainnya yang lebih luas.

Buku Guru ini bertujuan untuk memberikan pedoman bagi Bapak/Ibu Guru dalam menggunakan Buku Siswa. Dengan demikian, berbagai macam fitur yang dimiliki Buku Siswa diharapkan dapat dioptimalkan penggunaannya oleh Bapak/Ibu Guru. Selain itu, buku ini juga bertujuan untuk memberikan gagasan dan saran kepada Bapak/Ibu Guru dalam merancang, memandu, dan mengelola pembelajaran matematika. Gagasan dan saran pembelajaran yang disampaikan dalam buku ini diupayakan agar tidak hanya mudah untuk diimplementasikan secara luas, tetapi juga mengajak peserta didik menjadi pusat pembelajaran.

Secara garis besar, Buku Guru ini terdiri atas panduan umum dan panduan khusus. Panduan umum terdiri atasatas beberapa bagian. Pertama, panduan umum tersebut menjelaskan tujuan buku panduan guru, Profil Pelajar Pancasila, dan karakteristik mata pelajaran Matematika tingkat lanjut di kelas XI. Kedua, panduan umum tersebut mendeskripsikan Capaian Pembelajaran untuk Matematika tingkat lanjut kelas XI. Bagian ketiga adalah penjelasan tentang bagian-bagian dalam Buku Siswa. Terakhir, panduan umum tersebut juga berisi penjelasan ringkas strategi umum pembelajaran.

Panduan khusus terdapat di setiap bab. Panduan khusus ini memberikan gagasan atau rekomendasi pembelajaran matematika bagi Bapak/Ibu Guru di setiap babnya. Gagasan atau rekomendasi tersebut merentang dari kegiatan pra-pembelajaran, kegiatan pembelajaran, sampai kegiatan tindak lanjut. Kegiatan pembelajaran yang direkomendasikan tersebut terdiri atasatas beberapa aktivitas pembelajaran yang lebih kecil lagi. Hal ini dimaksudkan agar lebih fleksibel ketika diimplementasikan di setiap pertemuannya.

Proses penyusunan buku panduan guru ini telah mendapatkan banyak dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih

kepada Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. (Universitas Negeri Jember) dan Dr. Kiki Ariyanti Sugeng (Universitas Indonesia) yang telah mendampingi dan memberikan arahan kepada kami mulai dari awal sampai akhir. Kami juga berterima kasih kepada semua pihak dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia yang telah memfasilitasi kami dalam proses pengembangan buku panduan guru ini.

Kami menerima saran dan kritik dari Bapak/Ibu Guru dan pemerhati pendidikan demi perbaikan buku ini. Pada akhirnya, semoga buku ini bisa memberikan kontribusi terhadap peningkatan kualitas pembelajaran Matematika di Indonesia.

Jakarta, September 2021

Tim Penulis

Daftar Isi

> Kita sekarang menerima kenyataan bahwa belajar adalah proses seumur hidup untuk terus mengikuti perubahan. Tugas yang paling mendesak adalah mengajari orang cara belajar.
>
> – Peter Drucker –

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)

Panduan Umum

A. Pendahuluan

1. Tujuan

Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI ini disusun dengan dua tujuan utama. Tujuan pertama, buku ini diharapkan dapat memberikan gambaran tentang bagaimana menggunakan Buku Siswa Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI. Dengan demikian, berbagai fitur dalam Buku Siswa tersebut dapat dimanfaatkan secara optimal.

Tujuan kedua, rancangan pembelajaran yang disusun dalam buku ini diharapkan dapat memberikan wawasan dan gambaran bagi guru untuk merencanakan, mengelola, dan memandu jalannya pembelajaran. Buku ini memberikan rekomendasi kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana menyelenggarakan pembelajaran Matematika, mulai dari persiapan pembelajaran, kegiatan pembelajaran, sampai kegiatan tindak lanjut. Rekomendasi tersebut disusun secara terstruktur di setiap bab dalam buku ini.

2. Profil Pelajar Pancasila

Kegiatan pembelajaran yang dirancang dalam buku ini diupayakan untuk memberikan sumbangsih terhadap pengembangan kecakapan matematis, karakter, dan sikap peserta didik. Dengan demikian, upaya tersebut diharapkan berkontribusi dalam pencapaian visi pendidikan Indonesia, yaitu menciptakan Pelajar Pancasila yang mewujudkan Indonesia maju yang berdaulat, mandiri, dan berkepribadian.



Gambar 1.1 Profil Pelajar Pancasila

Pelajar Pancasila tidak hanya memiliki kemampuan kognitif yang mumpuni, tetapi juga perlu memiliki karakter yang sesuai dengan jati diri bangsa Indonesia serta mampu menjadi warga dunia yang unggul dan produktif. Oleh karena itu, Profil Pelajar Pancasila memiliki enam kompetensi yang perlu dicapai oleh peserta didik. Keenam kompetensi tersebut adalah (1) beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia, (2) berkebinekaan global, (3) bergotong-royong, (4) mandiri, (5) bernalar kritis, dan (6) kreatif.

3. Karakteristik Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI

Untuk dapat mengimplementasikan atau mengadaptasi pembelajaran yang direkomendasikan dalam buku ini secara optimal, Bapak/Ibu Guru perlu memahami karakteristik topik-topik Matematika tingkat lanjut yang diajarkan di kelas XI. Topik-topik tersebut adalah bilangan kompleks, polinomial, matriks, transformasi geometri, serta fungsi dan pemodelannya. Semua topik tersebut masuk ke dalam elemen bilangan, aljabar, dan fungsi. Topik-topik tersebut tidak berdiri sendiri-sendiri, tetapi saling terkait dengan topik-topik yang telah dipelajari oleh peserta didik di pengalaman belajar sebelumnya.

Akhirnya, panduan pembelajaran yang disediakan di dalam buku ini hanyalah sebatas rekomendasi. Bapak/Ibu Gurulah yang memiliki andil besar dalam membentuk peserta didik menjadi pribadi yang utuh—pribadi yang cakap secara matematis, berkarakter kuat, dan berdaya di dalam masyarakat. Untuk itu, Bapak/Ibu Guru perlu terus belajar praktik-praktik baik pembelajaran terkini, berkolaborasi dengan sesama guru dan para pemangku kepentingan pembelajaran matematika, serta merefleksikan pembelajaran yang telah dilakukan secara terus menerus untuk mencapai pembelajaran matematika yang efektif. Tidak kalah penting, Bapak/Ibu Guru juga perlu berupaya untuk menjadi inspirasi bagi peserta didik dalam hidup bermasyarakat.

B. Capaian Pembelajaran

Fase F+ (untuk kelas XI SMA Tingkat Lanjut)

Pada akhir fase F+, peserta didik dapat menyatakan bilangan kompleks dan operasinya pada bidang koordinat kompleks, menyatakan data dalam bentuk matriks dan melakukan operasi terhadap matriks dalam menerapkannya dalam

transformasi geometri dan penyelesaian sistem persamaan. Peserta didik melakukan operasi aritmatika pada polinomial. Peserta didik dapat memodelkan fenomena dengan fungsi trigonometri dan fungsi logaritma.

Tabel 1 Fase F+ Berdasarkan Elemen

Elemen	Capaian Pembelajaran
Bilangan	Di akhir fase F, peserta didik melakukan operasi aritmetika dengan bilangan kompleks, mewakili bilangan kompleks dan operasinya pada bidang kompleks, dan menggunakan bilangan kompleks dalam identitas dan persamaan polinomial (suku banyak).
Aljabar dan Fungsi	Di akhir fase F, peserta didik melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak), menentukan faktor polinomial, dan menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah. Mereka menyatakan data dalam bentuk matriks dan melakukan operasi terhadap matriks dalam menerapkannya dalam transformasi geometri dan penyelesaian sistem persamaan. Mereka menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan, memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri. Mereka dapat memodelkan berbagai fenomena dengan fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga dan fungsi *piecewise*.

C. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa

Untuk dapat mengimplementasikan aktivitas-aktivitas pembelajaran yang ditawarkan dalam Buku Siswa secara maksimal, Bapak/Ibu Guru perlu mengetahui bagian-bagian penting dalam buku tersebut.

1. Sampul Bab

Sampul bab berisi judul bab, tujuan pembelajaran, dan pertanyaan pemantik. Tujuan pembelajaran tersebut dirumuskan secara ringkas agar mudah dimengerti oleh peserta didik. Tujuan pembelajaran yang lebih detail dapat dijumpai di dalam Buku Guru. Pertanyaan pemantik dalam sampul bab terdiri atas permasalahan

dan pertanyaan yang terkait dengan permasalahan tersebut. Pertanyaan ini dimaksudkan untuk memantik motivasi peserta didik sebelum mempelajari isi dari bab tersebut.

2. Peta Konsep dan Kata Kunci

Peta konsep tersusun atas diagram yang menunjukkan koneksi antarkonsep dalam bab tertentu. Bagian ini dapat digunakan oleh guru dan peserta didik untuk melihat gambaran umum keterkaitan topik-topik matematika yang akan dipelajari di dalam bab tersebut. Bagian kata kunci terdiri atas istilah-istilah penting yang akan disebutkan dalam bab tersebut.

3. Pengantar Bab

Bagian pengantar bab berisi cerita atau fakta menarik tentang materi di dalam bab. Bagian ini diharapkan dapat memunculkan minat peserta didik untuk mempelajari materi di dalam bab tersebut. Dengan demikian, bagi guru, bagian ini dapat dimanfaatkan untuk memotivasi peserta didiknya sebelum melakukan pembelajaran.

4. Eksplorasi

Bagian eksplorasi disusun atas dasar prinsip pembelajaran yang berpusat peserta didik. Tujuan bagian ini adalah memfasilitasi peserta didik untuk bermatematika. Ketika kegiatan eksplorasi terletak di awal materi pembelajaran, kegiatan ini ditujukan untuk mengaktifkan pengetahuan awal peserta didik agar bersiap mengikuti pembelajaran berikutnya. Ketika kegiatan tersebut terletak di tengah-tengah, kegiatan tersebut bertujuan untuk memandu peserta didik mengonstruksi sendiri konsep, prinsip, atau prosedur Matematika.

5. Kolom Materi

Bagian-bagian penting dalam materi, seperti definisi dan sifat, disajikan dalam bentuk kolom-kolom materi. Hal ini ditujukan agar bagian tersebut lebih mencolok dan dapat ditemukan kembali dengan mudah oleh peserta didik ketika memerlukannya.

6. Contoh Soal dan Mari, Mencoba

Peserta didik akan lebih mudah memahami materi matematika jika dia mencermati sendiri demonstrasi penggunaan materi tersebut dalam penyelesaian soal. Itu adalah prinsip yang digunakan dalam penyusunan Contoh Soal. Setelah peserta didik mencermati Contoh Soal, peserta didik juga difasilitasi untuk menerapkan pengetahuan dan keterampilannya dengan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam Contoh Soal tersebut. Soal dalam Contoh Soal dan Mari, Mencoba merupakan soal yang setara.

7. Mari, Berpikir Kritis

Adanya kolom Mari, Berpikir Kritis merupakan suatu upaya untuk membentuk peserta didik menjadi Pelajar Pancasila yang siap hidup di abad ke-21. Kolom ini mengajak peserta didik membiasakan diri untuk tidak hanya menerima informasi yang diperolehnya, tetapi juga untuk menganalisis, merefleksikan, dan membuat keputusan terhadap informasi tersebut. Bagi guru, kolom ini dapat digunakan dalam pembelajaran di kelas atau sebagai tugas yang dikerjakan di luar kelas.

8. Mari, Berpikir Kreatif

Kolom Mari, Berpikir Kreatif sejalan dengan upaya untuk menjadikan peserta didik pelajar Pancasila yang hidup di abad ke-21. Kolom ini berisi permasalahan yang mengajak peserta didik untuk mengkreasi gagasan yang orisinal, bermakna, dan berdampak bagi pembelajarannya sendiri ataupun orang lain. Kolom ini dapat digunakan guru sebagai bagian dari aktivitas pembelajaran di dalam dan luar kelas.

9. Mari, Berkolaborasi

Kolom Mari, Berkolaborasi bertujuan untuk membudayakan hidup kolaboratif kepada peserta didik. Kolom ini dimaksudkan agar peserta didik siap menghadapi abad ke-21 yang sangat terkoneksi satu sama lain. Permasalahan dalam kolom ini perlu dikerjakan peserta didik dalam kelompok atau berpasangan. Untuk itu, permasalahan tersebut direkomendasikan untuk dijadikan aktivitas kelompok oleh guru.

10. Mari, Mengomunikasikan

Kolom Mari, Mengomunikasikan bertujuan untuk melatih komunikasi matematis peserta didik. Di dalam kolom ini, peserta didik akan menjumpai permasalahan yang meminta mereka menganalisis dan mengevaluasi pemikiran atau strategi orang lain. Selain itu, di kolom ini peserta didik juga akan diajak untuk mengomunikasikan pemikiran dan strateginya secara koheren kepada orang lain.

11. Matematika dan Sains

Kolom Matematika dan Sains berisi cerita atau fakta yang menunjukkan dekatnya Matematika dengan Sains. Dengan kolom ini, peserta didik diharapkan menjadi lebih tertarik mempelajari Matematika dan mendapatkan informasi-informasi di luar Matematika yang berguna bagi dirinya.

12. Matematika dalam Budaya

Matematika ada di mana-mana, termasuk di dalam budaya. Kurang lebih seperti itu pesan yang ingin disampaikan oleh fitur ini. Di dalam fitur ini, peserta didik akan diperlihatkan bagaimana Matematika muncul dalam budaya-budaya tertentu. Tujuannya agar peserta didik lebih mencintai dan menghargai Matematika. Selain itu, fitur ini juga diharapkan dapat menumbuhkan sikap berkebinekaan global ke peserta didik.

13. Latihan

Latihan terdiri atas dua bagian, yaitu Pemahaman Konsep dan Penerapan Konsep. Bagian Pemahaman Konsep berisi soal-soal yang bertujuan untuk memeriksa konsep-konsep penting yang diajarkan. Bagian Penerapan Konsep berisi soal-soal dan masalah-masalah yang meminta peserta didik menerapkan konsep-konsep matematika yang telah dipelajari dan mengintegrasikannya untuk menyelesaikan masalah.

14. Rangkuman

Bagian ini berisi rangkuman dan ringkasan dari materi penting yang disajikan dalam suatu bab. Rangkuman ini dapat digunakan oleh peserta didik untuk mengingat kembali apa saja yang telah dipelajarinya di dalam bab tersebut.

15. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi terdiri atas soal-soal yang dibagi menjadi tiga kategori, yaitu Uji Pemahaman, Penerapan, dan Penalaran. Soal-soal yang masuk ke dalam kategori Uji Pemahaman merupakan soal-soal yang sejalan dengan tujuan pembelajaran yang ditetapkan. Soal-soal dalam kategori Penerapan merupakan soal-soal penerapan Matematika dalam kehidupan sehari-hari. Kategori Penalaran berisi soal-soal yang mengajak peserta didik bernalar dan membuktikan pernyataan matematis.

16. Proyek

Fitur Proyek ini cocok digunakan dalam pembelajaran berbasis proyek. Di dalam proyek, peserta didik diminta mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilannya untuk menyelesaikan suatu masalah atau tugas tertentu.

17. Refleksi

Bagian Refleksi terdiri atas dua bagian. Di bagian pertama, peserta didik diminta untuk menceritakan manfaat yang diterimanya setelah mempelajari materi dalam bab tertentu. Di bagian kedua, peserta didik diajak untuk mengevaluasi diri terhadap pengalaman belajarnya. Bagi guru, bagian Refleksi ini bisa dimanfaatkan di setiap akhir pembelajaran subbab atau bab tertentu.

18. Pengayaan

Semua materi tidak mungkin disediakan di dalam sebuah buku. Oleh karena itu, bagian pengayaan ini memberikan informasi bagi peserta didik jika mereka ingin memperdalam dan memperkaya pengetahuan dan keterampilan yang relevan.

D. Strategi Umum Pembelajaran

Aktivitas-aktivitas pembelajaran yang disusun dalam buku ini paling tidak didasarkan pada tiga pertimbangan. Setiap pertimbangan tersebut dijelaskan sebagai berikut.

1. Prinsip-Prinsip Desain Pembelajaran

Beberapa prinsip desain pembelajaran digunakan untuk menyusun rancangan kegiatan pembelajaran di dalam buku ini. Prinsip-prinsip tersebut dipilih dengan tujuan untuk mengembangkan kompetensi-kompetensi peserta didik agar mereka dapat berkembang secara utuh dan mencapai Profil Pelajar Pancasila. Setiap prinsip tersebut dideskripsikan sebagai berikut.

a. Peserta didik adalah Pusat Pembelajaran

Rancangan pembelajaran yang ditawarkan dalam Buku Panduan Guru ini menggunakan pendekatan pembelajaran yang berpusat pada peserta didik. Dalam rancangan pembelajaran tersebut, peserta didik difasilitasi untuk terlibat aktif dalam membangun sendiri pengetahuannya. Hal ini diawali dengan pengaktifan pengetahuan dan keterampilan awal peserta didik, kemudian dilanjutkan dengan fasilitasi kepada peserta didik untuk melakukan matematika. Kedua hal tersebut dilakukan melalui aktivitas Eksplorasi di Buku Siswa.

b. Pemahaman Konseptual Dahulu, Kefasihan Prosedural Kemudian

Pembelajaran Matematika perlu berfokus pada pemahaman konseptual. Artinya, pembelajaran Matematika perlu disusun agar dapat memfasilitasi peserta didik untuk memiliki pemahaman konseptual yang kuat. Setelah itu, pembelajaran dapat dilanjutkan ke arah prosedural. Karena alasan ini, urutan penyajian materi di dalam Buku Siswa biasanya dimulai dari aktivitas Eksplorasi, kemudian dilanjutkan dengan Contoh Soal dan Mari, Mencoba, serta kolom-kolom lain yang berisi permasalahan (seperti Mari, Berpikir Kritis; Mari, Berpikir Kreatif; Mari, Mengomunikasikan; dan Mari, Berkolaborasi).

c. Kompetensi Diperoleh secara Individu dan Kolektif

Sebagian besar (jika tidak semuanya) aktivitas pembelajaran yang disusun dalam buku ini menggunakan pembelajaran kooperatif. Pembelajaran kooperatif tersebut bisa dimulai dari aktivitas individu atau langsung aktivitas berkelompok. Meskipun demikian, ada beberapa waktu peserta didik lebih cocok untuk bekerja mandiri, misalnya ketika mengerjakan bagian Mari, Mencoba dan soal-soal dalam Latihan.

d. Dukungan terhadap Peserta Didik yang Beragam

Peserta didik itu beragam. Oleh karena itu, tidak ada teknik, metode, model, atau strategi pembelajaran yang selalu cocok untuk semua peserta didik. Meskipun demikian, penyusunan Buku Siswa dan Buku Panduan Guru ini telah diupayakan untuk mengakomodasi keberagaman peserta didik tersebut. Pertama, jenis-jenis soal dalam Buku Siswa disusun bervariasi agar Bapak/Ibu Guru memiliki keleluasaan untuk memilih soal mana yang cocok dengan peserta didiknya. Kedua, aktivitas pembelajaran yang direkomendasikan dalam Buku Panduan Guru ini disusun tidak terlalu spesifik agar dapat memberikan ruang bagi Bapak/Ibu Guru untuk menyesuaikannya dengan konteks peserta didik dan konteks lingkungan belajarnya. Terakhir, beberapa panduan pembelajaran untuk subbab dalam Buku Panduan Guru ini memiliki alternatif-alternatif pembelajaran yang dapat dipertimbangkan oleh Bapak/Ibu Guru.

2. Siklus Pengajaran

Seperti yang dijelaskan di bagian sebelumnya, sebagian besar rancangan pembelajaran di dalam buku ini menggunakan pembelajaran kooperatif. Agar pembelajaran kooperatif tersebut betul-betul dapat menciptakan diskusi yang produktif, Bapak/Ibu Guru dapat mengikuti tahapan-tahapan pengajaran yang dipaparkan dalam Tabel 2 berikut.

Tabel 2 Siklus Pengajaran

Tahap	**Kegiatan**	**Deskripsi**
0	Mengidentifikasi Tujuan	Langkah awal adalah identifikasi tujuan. Bapak/Ibu Guru dapat melihat tujuan pembelajaran setiap subbabnya di bagian Persiapan Pembelajaran.

Tahap	**Kegiatan**	**Deskripsi**
1	Mengantisipasi	Dalam tahap ini, guru perlu memeriksa aktivitas-aktivitas pembelajaran yang akan dilakukan peserta didik dan memperkirakan bagaimana peserta didik akan menyelesaikan aktivitas-aktivitas tersebut. Untuk membantu Bapak/Ibu Guru melakukannya, buku ini menyediakan pertanyaan-pertanyaan panduan di setiap subbabnya pada bagian Persiapan Pembelajaran.
2	Memonitor	Tahapan ini dilakukan ketika pembelajaran berlangsung. Di tahapan ini, guru berkeliling memantau pekerjaan peserta didik (baik individu ataupun berkelompok) dan membuat catatan mengenai pekerjaan peserta didik. Selain itu, guru juga memberikan bimbingan, arahan, dan topangan yang diperlukan.
3	Memilih	Di tahap ini, guru perlu merefleksikan catatan yang dibuatnya untuk memilih peserta didik atau kelompok mana yang perlu mempresentasikan hasil pekerjaannya. Ketika memilih peserta didik atau kelompok tersebut, guru perlu memperhatikan bahwa hasil pekerjaan peserta didik atau kelompok tersebut potensial untuk menciptakan diskusi klasikal yang produktif.
4	Mengurutkan	Setelah guru memutuskan peserta didik atau kelompok mana yang presentasi, langkah berikutnya ialah menentukan urutan presentasinya. Pengurutan tersebut dapat didasarkan atas banyak hal, misalnya dari strategi yang tidak formal ke yang formal, dari yang sederhana ke yang kompleks, atau dari yang biasa ke yang tidak biasa.

Tahap	Kegiatan	Deskripsi
5	Menghubungkan	Di tahapan terakhir ini, guru perlu memberikan penegasan dan pembahasan mengenai apa yang telah didiskusikan. Untuk melakukannya, guru perlu menunjukkan hubungan antara sajian presenter satu ke presenter lainnya. Guru juga perlu menegaskan pesan pembelajaran yang akan diterima oleh peserta didik dan membahas ide-ide lain yang masih memungkinkan untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan.

3. Siklus Pembelajaran

Meskipun tidak tampak secara jelas, penyajian materi di dalam Buku Siswa dan penyusunan aktivitas pembelajaran di dalam buku ini mengikuti suatu siklus pembelajaran. Siklus pembelajaran tersebut diawali dengan aktivasi pengetahuan awal peserta didik, demonstrasi materi, aplikasi materi, dan integrasi. Siklus ini dilakukan di seputaran permasalahan yang diberikan. Di dalam Buku Siswa, permasalahan tersebut pada umumnya diberikan melalui aktivitas Eksplorasi. Selain itu, pemberian masalah juga dapat dilakukan dengan menggunakan pertanyaan-pertanyaan yang memantik pemikiran peserta didik mengenai materi yang akan dipelajari. Tahapan-tahapan dalam siklus pembelajaran tersebut dideskripsikan secara ringkas sebagai berikut.

a. Tahap 1: Aktivasi

Tujuan tahapan ini adalah untuk menghubungkan apa yang telah diketahui peserta didik dengan materi yang akan dipelajari. Di dalam Buku Siswa, tahapan ini sebagian besar dilakukan dengan menggunakan aktivitas eksplorasi. Beberapa kali, tahapan ini juga dilakukan dengan memberikan penjelasan atau pertanyaan yang memantik keingintahuan peserta didik mengenai materi yang akan dibahas.

b. Tahap 2: Demonstrasi

Di tahapan kedua, peserta didik akan mendapatkan penjelasan atau demonstrasi dari materi yang dibahas. Demonstrasi ini dapat berupa kolom-kolom materi (definisi dan sifat, misalnya) ataupun contoh soal. Pada tahapan ini, pemahaman konseptual peserta didik diharapkan sudah terbentuk.

c. Tahap 3: Aplikasi

Tidak hanya berhenti di penjelasan dan demonstrasi materi, agar pembelajarannya optimal, peserta didik perlu mendapatkan kesempatan untuk mengaplikasikan pengetahuannya. Hal ini dilakukan agar peserta didik fasih dalam melakukan prosedur atau menerapkan strategi penyelesaian soal atau masalah matematika. Di dalam Buku Siswa, tahapan ketiga ini difasilitasi melalui fitur Mari, Mencoba dan fitur-fitur lainnya, seperti Mari, Berpikir Kritis dan Mari, Berpikir Kreatif.

d. Tahap 4: Integrasi

Pengalaman belajar peserta didik menjadi bermakna ketika mereka mampu mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilan yang diperolehnya untuk menyelesaikan masalah. Di dalam Buku Siswa, tahapan ini dapat dilakukan dengan pengerjaan soal-soal dalam Latihan. Dalam buku ini, guru dapat membaca bagian Penugasan di setiap subbabnya untuk melihat panduan bagaimana memfasilitasi peserta didik melakukan integrasi pengetahuan.

E. Penilaian

1. Tujuan Pembelajaran

Terdapat dua jenis tujuan pembelajaran yang dituliskan dalam buku panduan guru ini, yaitu tujuan pembelajaran untuk peserta didik dan guru. Tujuan pembelajaran untuk peserta didik dapat ditemukan di setiap sampul bab dalam Buku Siswa dan di bagian Persiapan Pembelajaran dalam buku ini. Tujuan pembelajaran untuk peserta didik tersebut disusun secara ringkas agar mudah dibaca dan dipahami oleh peserta didik.

Tujuan pembelajaran untuk guru dapat ditemukan di bagian Persiapan Pembelaran dalam buku ini. Tujuan pembelajaran ini dibuat dengan sasaran pembaca guru. Dengan demikian, tujuan pembelajaran tersebut dirumuskan secara rinci agar guru dapat menangkap konten dan aktivitas pembelajaran apa yang akan dilakukan.

2. Penilaian Formatif

Buku Siswa memuat banyak pilihan yang dapat digunakan oleh guru untuk penilaian formatif. Salah satunya adalah soal-soal dalam Latihan di setiap subbabnya. Soal-soal tersebut dikategorikan menjadi dua, yaitu Pemahaman Konsep dan Penerapan Konsep. Soal-soal di dalam kategori yang pertama ditujukan untuk menguji pemahaman peserta didik terhadap fakta-fakta dan konsep-konsep penting dalam subbab. Di kategori kedua, soal-soalnya ditujukan untuk mengasah kemampuan peserta didik dalam menerapkan dan mengintegrasikan konsep, prinsip, dan prosedur yang dipelajarinya.

Selain latihan, terdapat beberapa fitur Buku Siswa yang dapat digunakan sebagai penilaian formatif, misalnya Mari, Berpikir Kritis; Mari, Berpikir Kreatif; Mari, Mengomunikasikan; dan Mari, Berkolaborasi. Soal-soal dalam fitur-fitur tersebut disusun tidak hanya untuk memfasilitasi peserta didik mengembangkan kecakapan matematisnya, tetapi juga untuk mempersiapkan mereka hidup di abad ke-21 dan mengembangkan karakter mereka agar sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila.

3. Penilaian Sumatif

Untuk melakukan penilaian sumatif, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Uji Kompetensi dan Proyek di setiap akhir bab. Soal-soal dalam Uji Kompetensi memiliki rentang yang beragam, mulai dari Uji Pemahaman, Penerapan, sampai Penalaran. Untuk Proyek, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakannya di dalam pembelajaran yang berbasis proyek.

4. Penilaian sebagai Aktivitas Belajar

Selain penilaian formatif dan sumatif, Buku Siswa juga memfasilitasi peserta didik untuk belajar selama proses penilaian. Hal ini dapat dilakukan melalui kegiatan Refleksi di setiap akhir bab. Refleksi tersebut dimaksudkan untuk mengajak

peserta didik merenungkan kembali pembelajaran yang telah dilakukannya dan mengevaluasi diri berdasarkan pengalaman tersebut.

F. Interaksi Guru dan Orang Tua/Wali

Salah satu faktor penting keberhasilan pembelajaran yang dilakukan peserta didik adalah dukungan orang tua/walinya. Untuk itu, Bapak/Ibu Guru dapat mengomunikasikan konten dan aktivitas pembelajaran kepada orang tua/wali. Misalnya, Bapak/Ibu Guru dapat memberi tahu orang tua/wali peserta didik mengenai tujuan pembelajaran yang perlu dicapai. Lebih lanjut, orang tua/wali juga dapat diberikan informasi terkait strategi pembelajaran yang akan digunakan. Dengan cara seperti ini, diharapkan, orang tua/wali peserta didik dapat memberikan lingkungan belajar yang kondusif bagi peserta didik untuk belajar secara optimal.

Tidak kalah penting, Bapak/Ibu Guru juga sebaiknya memberi tahu perkembangan atau kesulitan belajar yang dialami peserta didik kepada orang tua/walinya. Jika peserta didik mengalami kesulitan belajar, Bapak/Ibu Guru juga sebaiknya mencari tahu faktor-faktor penyebabnya. Salah satu caranya ialah berkomunikasi dengan orang tua/walinya. Dengan cara seperti ini, lingkungan di sekitar peserta didik diharapkan betul-betul mendukungnya untuk belajar.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)

Panduan Khusus

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)



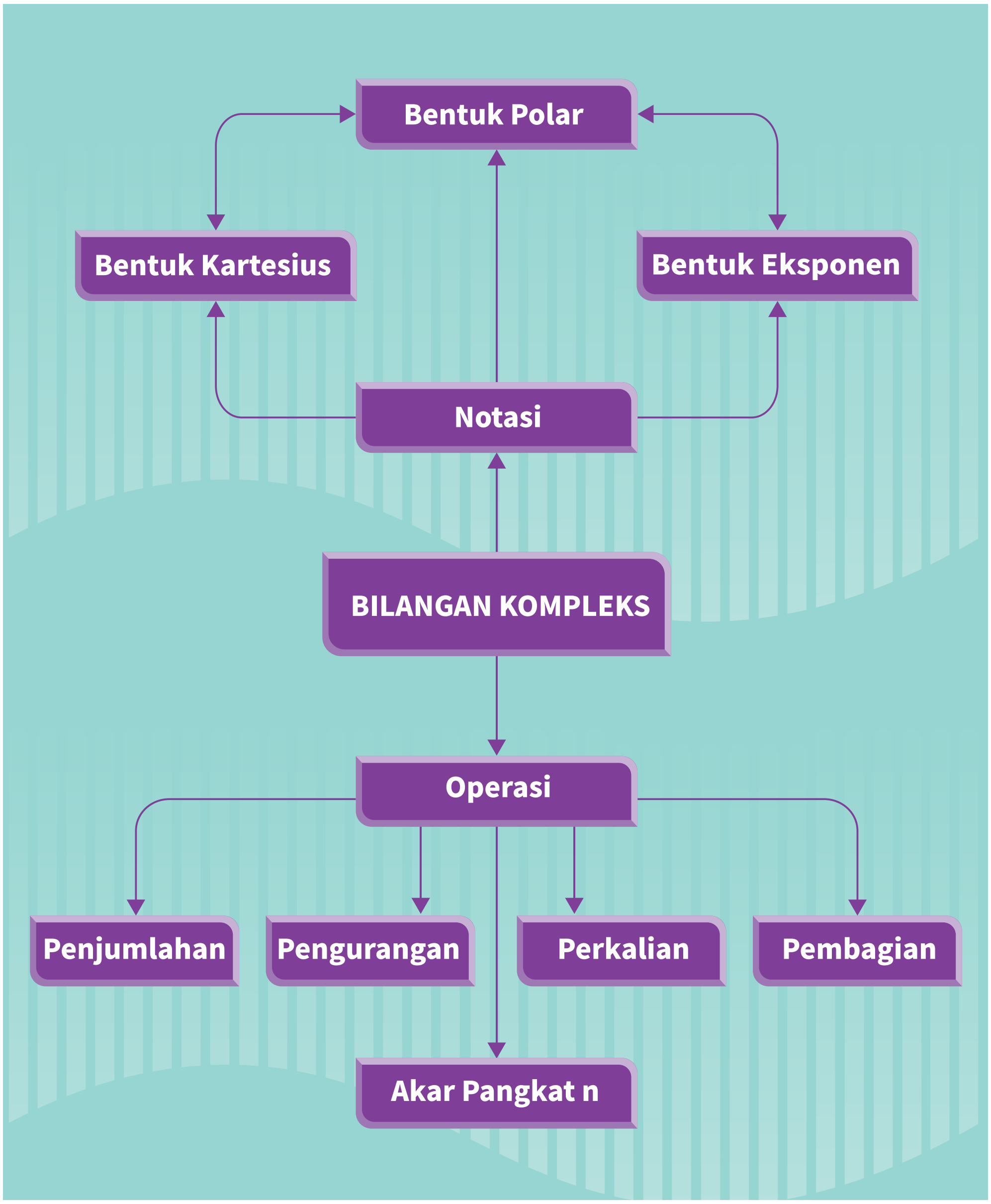
Bab 1
Bilangan Kompleks

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Menjelaskan pengertian dan bentuk bilangan kompleks
2. Melakukan operasi-operasi pada bilangan kompleks serta menggunakan sifat-sifatnya untuk penyelesaian masalah
3. Menjelaskan bentuk konjugat, argumen dan modulus bilangan kompleks, serta menggunakan sifat-sifatnya untuk penyelesaian masalah.

A. Peta Konsep



Kata Kunci
Bilangan Kompleks; Notasi Bilangan Kompleks; Bidang Kompleks; Operasi pada Bilangan Kompleks, Bentuk Kartesius, Bentuk Polar, Bentuk Eksponen, Akar Pangkat n

B. Gambaran Umum

Di dalam matematika, hal yang sering dipelajari ialah mencari solusi suatu persoalan yang diberikan dalam model matematika atau persamaan matematika. Solusi-solusi tersebut merupakan anggota dari himpunan bilangan real yang telah dipelajari saat berada SMP/MTs. Pada bab bilangan kompleks, peserta didik akan diajak untuk mengembangkan pengetahuan dan pemahamannya untuk mempelajari materi bilangan kompleks. Materi bilangan kompleks ini juga dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan yang tidak dapat diselesaikan dalam himpunan bilangan real.

Bab ini dimulai dengan menemukan konsep bilangan kompleks. Peserta didik diajak untuk memahami definisi bilangan kompleks melalui kegiatan eksplorasi. Kemudian, peserta didik diajak untuk memahami lebih dalam bentuk-bentuk bilangan kompleks dan direpresentasikan pada bidang kompleks.

Pada subbab B, peserta didik diajak untuk memahami operasi-operasi pada bilangan kompleks. Peserta didik diajak untuk menentukan bagaimana penjumlahan atau perkalian dua bilangan kompleks dan perkalian skalar dengan bilangan kompleks dengan memanfaatkan pengetahuan operasi pada vektor. Selain itu, peserta didik diarahkan juga untuk menemukan sifat-sifat pada Operasi pada Bilangan Kompleks.

Pada subbab terakhir, yaitu subbab C, peserta didik belajar modulus, argumen dan sekawan dari bilangan kompleks. Peserta didik mempelajari modulus dari bilangan kompleks dengan memanfaatkan sifat-sifat trigonometri.

C. Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Bilangan Kompleks	8	1. Menjelaskan pengertian bilangan kompleks 2. Mengenal bentuk-bentuk bilangan kompleks 3. Menuliskan bilangan kompleks pada bidang kompleks.	1. Pengertian Bilangan Kompleks 2. Bentuk-bentuk bilangan kompleks	Bilangan Kompleks; bentuk kartesius; bentuk polar; bentuk eksponen	• Ekspositori • Eksplorasi • Diskusi	Buku Siswa	*Fungsi Variabel Kompleks*, Encum Sumiaty, M.Si dan Endang Dedy, M.Si., Bumi Aksara, 2020.
Operasi pada Bilangan Kompleks	10	1. Melakukan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan kompleks 2. Menentukan sifat-sifat yang berlaku pada Operasi pada Bilangan Kompleks	1. Operasi penjumlahan pada bilangan kompleks 2. Perkalian bilangan kompleks	Operasi penjumlahan; pengurangan; perkalian; pembagian	• Ekspositori • Eksplorasi • Diskusi	Buku Siswa	*Fungsi Variabel Kompleks*, Encum Sumiaty, M.Si dan Endang Dedy, M.Si., Bumi Aksara, 2020.
Konjugat, Argumen dan Modulus Bilangan Kompleks	7	1. Menjelaskan konjugat suatu bilangan kompleks dan sifat-sifatnya 2. Menjelaskan modulus suatu bilangan kompleks dan sifat-sifatnya.	1. Konjugat bilangan kompleks 2. Modulus bilangan kompleks 3. Argumen bilangan kompleks	Modulus; Konjugat; Argumen.	• Ekspositori • Eksplorasi • Diskusi	Buku Siswa	*Fungsi Variabel Kompleks*, Encum Sumiaty, M.Si dan Endang Dedy, M.Si., Bumi Aksara, 2020.

D. Panduan Pembelajaran: Konsep Bilangan Kompleks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Konsep Bilangan Kompleks melalui aktivitas, peserta didik dipandu oleh guru untuk menemukan konsep bilangan kompleks. Peserta didik diajak untuk memahami pengertian bilangan kompleks melalui kegiatan eksplorasi. Kemudian, peserta didik diajak untuk menyimpulkan pengertian bilangan kompleks, memahami unsur-unsur bilangan kompleks seperti bagian real dan bagian imajiner.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Konsep Bilangan Kompleks, diharapkan peserta didik mampu:

1. menjelaskan pengertian kompleks
2. mengenal bentuk-bentuk bilangan kompleks
3. menuliskan bilangan kompleks pada bidang kompleks

> Menentukan konsep dari bilangan kompleks.

b. Alat dan Bahan

Alat tulis untuk pembelajaran bilangan kompleks:

1. Aplikasi Desmos
2. Buku kotak-kotak
3. Busur Derajat
4. Kalkulator Scientific

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Konsep Bilangan Kompleks, guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara Bapak/Ibu guru memandu peserta didik agar mereka menemukan sendiri konsep bilangan kompleks?
- Mengapa bilangan kompleks penting untuk dipelajari dan apa keterkaitannya dengan bilangan real?

- Unsur apa saja yang ada pada bilangan kompleks?
- Kesalahan dan miskonsepsi apa yang kemungkinan akan dilakukan oleh peserta didik ketika menemukan konsep bilangan kompleks?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Kegiatan pemanasan ini mengajak peserta didik untuk mengingat kembali konsep bilangan real yang dimanfaatkan dalam menyelesaikan suatu persamaan aljabar. Kemudian, diberikan sebuah persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan memamfaatkan konsep himpunan bilangan real. Kegiatan ini dilakukan agar peserta didik mudah dalam menemukan konsep bilangan kompleks.

Pada saat apersepsi, Bapak/Ibu guru dapat bercerita tentang contoh-contoh persaman aljabar. Setelah itu, fokuskan cerita tersebut kepada contoh-contoh persamaan aljabar yang tidak mempunyai solusi real. Di akhir cerita tersebut, mintalah peserta didik untuk mencermati kegiatan eksplorasi "solusi persamaan aljabar". Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, berilah peserta didik waktu beberapa menit terlebih dahulu untuk berpikir.

Eksplorasi—Solusi Persamaan Aljabar
Alternatif Penyelesaian
Jika $x^2+1=0$, maka x^2 = -1 sehingga diperoleh $x=\sqrt{-1}$ dan $x=-\sqrt{-1}$.

Kesimpulan: Aktivitas pemanasan dilakukan untuk memotivasi siswa tentang pentingnya mempelajari subbab ini. Tunjuklah satu atau dua peserta didik untuk membagikan jawaban ke depan kelas dan menjelaskan yang peserta didik ketahui tentang solusi yang diperoleh. Setelah seorang peserta didik selesai menjelaskan, tanyakan apakah hasil solusi tersebut merupakan bagian dari bilangan real? Lalu, tanyakan alasannya.

b. Aktivitas

Aktivitas ini merupakan kelanjutan dari aktivitas pemanasan. Tujuan dari aktivitas ini adalah untuk mengajak peserta didik menemukan konsep bilangan kompleks.

Kegiatan Bentuklah kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk

menemukan konsep bilangan kompleks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk menyelesaikan masalah yang diberikan pada aktivitas eksplorasi. Membentuk kelompok-kelompok ini bisa dilakukan untuk aktivitas-aktivitas lain pada bab ini.

Eksplorasi— Mengenal Bentuk Bilangan Kompleks

Di jenjang sekolah menengah pertama kalian telah belajar tentang bentuk-bentuk bilangan real. Di aktivitas ini, kalian akan menggunakan pengetahuan mengenai bentuk-bentuk bilangan real untuk mengindentifikasi bentuk-bentuk mana saja yang bilangan real dan bukan bilangan real.

1. Kelompokkan bentuk-bentuk bilangan berikut menjadi dua bagian.
   $2\sqrt{2}$, -8, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, $3+\sqrt{-5}$, 2, $\sqrt{-1}$ dan $2-\sqrt{5}$
   Setelah kalian selesai mengelompokkannya, jelaskan alasan kalian dalam mengelompokkan bentuk-bentuk tersebut.
2. Salah satu cara untuk mengelompokkan bentuk-bentuk bilangan pada bagian 1 adalah sebagai berikut.
   Kelompok 1: $2\sqrt{2}$, -8, 2, dan $2-\sqrt{5}$
   Kelompok 2: $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, $3+\sqrt{-5}$, dan $\sqrt{-1}$
   Menurut kalian, pengelompokkan tersebut didasarkan pada apa?

Pada bagian 2, bentuk-bentuk bilangan pada kelompok 1 disebut dengan kelompok bilangan real, sedangkan bentuk-bentuk pada kelompok 2 bukanlah bilangan real. Jika demikian, menurut kalian apa yang bisa kita simpulkan?

Kesimpulan Untuk memfasilitasi peserta didik membuat kesimpulan, Bapak/ Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Mintalah beberapa kelompok untuk mengomunikasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang bilangan real dan bukan bilangan real dengan tepat.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika mengelompokkan bilangan-bilangan ke dalam dua kelompok, mungkin saja peserta didik mengalami kesalahan dalam menentukan kelompok kedua bilangan tersebut. Oleh karena itu, guru dapat mengingatkan kepada peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan pengelompokkan. Misalnya, kekeliruan dalam pengertian akar. (contoh, mereka menganggap bahwa $2\sqrt{2}$ bukan bilangan real). Akibatnya, pengelompokkan bilangan menjadi keliru. Selain itu, ingatkan ke peserta didik bahwa syarat $\sqrt{x}$ pada bilangan real akan bernilai real jika $x \geq 0$.

Berdasarkan kesimpulan peserta didik mengenai pengelompokan bilangan real dan bukan bilangan real. Pandulah peserta didik untuk memahami definisi bilangan kompleks, ajaklah peserta didik untuk memahami bilangan kompleks berdasarkan Definisi 1.1 yang diberikan pada buku peserta didik. Bapak/Ibu guru perlu penjelaskan bahwa $\sqrt{-1}$ dinotasikan dalam bentuk i, atau bahwa i adalah notasi Euler yang menyatakan sebuah bilangan yang dikuadratkan bernilai −1. Kemudian ajaklah peserta didik mencermati Contoh 1.1. Di akhir, ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai konsep bilangan kompleks dengan mengerjakan Mari, Mencoba dalam Contoh 1.1.

Mari, Mencoba 1.1

Alternatif Penyelesaian

a. Bentuk $2+\sqrt[4]{(-2)}^{2}=(2+\sqrt{2})+0i$ memiliki bagian real dan bagian imajiner, yakni $2+\sqrt{2}$ adalah bagian real dan 0 bagian imajiner.

b. Bentuk $2 + i^2$ dapat dinyatakan sebagai $2+i^2=2-1=1+0i$ sehingga 1 adalah bagian real dan 0 bagian imajiner.

c. Bentuk $1+\sqrt{-9}$ dapat dinyatakan sebagai $1+\sqrt{-9}=1+\sqrt{-1}\sqrt{9}=1+3i$ sehingga 1 adalah bagian real dan 3 bagian imajiner.

d. Bentuk $1 + 2i$ merupakan bilangan kompleks dikarenakan memuat bagian real yakni 1 dan bagian imajiner yakni 2.

Untuk melihat keterkaitan antara himpunan bilangan real dan bilangan kompleks, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan aktivitas Mari, Mengomunikasikan setelah Contoh 1.1.

Mari Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan setiap bilangan real x dapat dinyatakan dalam bentuk $x = x + 0i$ sehingga himpunan bilangan real dapat dipandang sebagai bagian dari bilangan kompleks.

Selanjutnya, Bapak/Ibu guru perlu melanjutkan pembelajaran dengan mengerjakan Mari, Mencoba dari Contoh 1.2. Hal ini memperlihatkan bagaimana bilangan kompleks dimanfaatkan untuk menyelesaikan suatu persamaan kuadrat.

Mari, Mencoba 1.2

Tentukan solusi dari persamaan kuadrat $x^2 + x + 2 = 0$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan manfaatkan rumus kuadratik untuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, diperoleh solusi persamaan kuadrat $x^2 + x + 2 = 0$ adalah

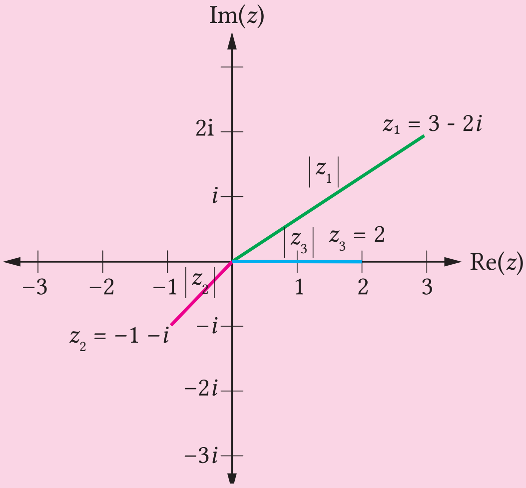
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$ atau, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{7}\,i}{2}$ dan $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{7}\,i}{2}$.

Setelah menjelaskan bagaimana memanfaatkan bilangan kompleks dalam menyelesaikan persamaan aljabar, Bapak/Ibu guru dapat kembali menjelaskan tentang bentuk kartesius bilangan kompleks pada Definisi 1.2. Untuk lebih memahami bentuk kartesius bilangan kompleks, mintalah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba Contoh 1.3.

Mari, Mencoba 1.3

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa, dengan memanfaatkan pengetahuan tentang koordinat kartesius, diperoleh ilustrasi bilangan kompleks tersebut pada bidang kompleks adalah sebagai berikut.



Selain bentuk kartesius, dengan memanfaatkan ilustrasi bilangan kompleks pada bidang kompleks, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik memahami bentuk lain dari bilangan kompleks yang dikenal sebagai bentuk polar dengan memanfaatkan aturan Trigonometri. Kemudian, jelaskan Definisi 1.3 sebagai bentuk polar dari bilangan kompleks.

Untuk lebih memahami bentuk polar bilangan kompleks, mintalah peserta didik mengerjakan Mari, mecoba Contoh 1.4.

Mari, Mencoba 1.4

Alternatif Penyelesaian

a. Perhatikan bahwa, bilangan kompleks $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ mempunyai $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ dan $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dan $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Salah satu nilai

θ yang memenuhi adalah $\theta = 60^o$. Jadi, bentuk polar dari bilangan kompleks $1 + \sqrt{3i}$ adalah $z = 2(\cos 60^{\circ} + i \sin 60^{\circ})$.

b. Dengan cara serupa seperti bagian (a), diperoleh bentuk polar dari bilangan kompleks $-i$ adalah $z = (\cos 270^{\circ} + i \sin 270^{\circ})$.

Bapak/Ibu guru perlu melanjutkan pembelajaran dengan menjelaskan Definisi 1.4 sebagai bentuk eksponen dari bilangan kompleks. Untuk lebih memahami bentuk eksponen bilangan kompleks, mintalah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba Contoh 1.5.

Mari, Mencoba 1.5

Alternatif Penyelesaian

Bilangan kompleks $z = (\cos 30^{\circ} + i \sin 30^{\circ})$ dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen yakni $z = e^{i30^{\circ}}$.

Bilangan kompleks $z = \dfrac{(\cos 15^{\circ} + i \sin 15^{\circ})}{2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen yakni $z = \dfrac{1}{2} e^{i15^{\circ}}$.

Aktivitas terakhir yang perlu dijelaskan kepada peserta didik ialah tentang kesamaan dua bilangan kompleks. Dengan memanfaatkan pengertian kesamaan dua bilangan kompleks, mintalah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba dari Contoh 1.6.

Mari, Mencoba 1.6

Alternatif Penyelesaian

Dengan memanfaatkan pengertian kesamaan dua bilangan kompleks, maka bisa diperoleh kesimpulan.

a. sama
b. berbeda
c. berbeda

Kesimpulan Mintalah beberapa peserta didik untuk mengomunikasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang pengertian dan bentuk-bentuk bilangan kompleks.

C. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab Konsep Bilangan Kompleks, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya ialah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana cara kalian menentukan bilangan kompleks?
- Bagaimana cara menggambarkan bilangan kompleks pada bidang kompleks?
- Bentuk-bentuk bilangan kompleks apa saja yang telah kalian ketahui?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami bilangan kompleks, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan A nomor 1, 6, 9. Beri waktu 10 sampai 15 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Konsep Bilangan Kompleks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada Buku Siswa nomor 1 – 4.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Latihan A

Alternatif Penyelesaian

Pemahaman Konsep

1. *Benar*
2. *Salah*
3. *Salah.*

Penerapan Konsep

4. Perhatikan bahwa, bilangan kompleks $z = 2 + 2i$ mempunyai $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ dan $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Salah satu nilai θ yang memenuhi adalah $\theta = 45^o$. Jadi, bentuk polar dari bilangan kompleks $z = 2 + 2i$ adalah $z = 2\sqrt{2}$ $(\cos 45^o + i \sin 45^o)$, sedangkan bentuk eksponen dari $z = 2\sqrt{2}$ $(\cos 45^o + i \sin 45^o)$ adalah $z = 2\sqrt{2}\, e^{i45^o}$.
5. Nilai x dan y yang memenuhi adalah $x = 3$ dan $y = -3$.
6. Solusi persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 6 = 0$ adalah $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}\, i$ atau, $x_1 = 1 + \sqrt{5}\, i$ dan $x_2 = 1 - \sqrt{5}\, i$.
7. Persamaan kuadrat yang mempunyai solusi x_1 dan x_2 adalah $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$. Jadi persamaan kuadrat yang mempunyai akar-akar $x_1 = 1 + i$ dan $x_2 = 1 - i$ adalah $x^2 - ((1 + i) + (1 - i))\, x + (1 + i)(1 - i) = 0$ atau $x^2 - 2x + 2 = 0$.

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal-soal Latihan A nomor 2, 4, dan 6. Soal-soal tersebut diharapkan dapat menjaga dan mengembangkan pengetahuan dan pemahaman peserta didik mengenai Konsep Bilangan Kompleks.

E. Panduan Pembelajaran:Operasi pada Bilangan Kompleks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Operasi pada Bilangan Kompleks peserta didik diajak untuk memahami operasi penjumlahan dan perkalian dua bilangan kompleks, perkalian skalar dengan bilangan kompleks. Peserta didik juga diajak memahami sifat-sifat yang berlaku pada Operasi pada Bilangan Kompleks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Operasi pada Bilangan Kompleks, diharapkan peserta didik mampu:

1. melakukan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan kompleks.
2. menentukan sifat-sifat yang berlaku pada Operasi pada Bilangan Kompleks.

Buku Siswa
Menjelaskan dan melakukan operasi pada bilangan kompleks, serta menggunakan sifat-sifatnya untuk penyelesaian masalah.

b. Alat dan Bahan

Alat tulis untuk pembelajaran

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Operasi pada Bilangan Kompleks, guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Operasi apa saja yang telah peserta didik ketahui dalam himpunan bilangan?
- Bagaimana cara Bapak/Ibu guru memandu peserta didik agar mereka dapat memahami Operasi pada Bilangan Kompleks?
- Mengapa operasi pada bilangan kompleks penting untuk dipelajari?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasansan

Dalam kegiatan pemanasan bertujuan untuk menarik perhatian keseluruhan peserta didik agar terarah ke dalam pembelajaran Operasi pada Bilangan Kompleks. Untuk mengawali pembelajaran di subbab ini, Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali beberapa pertanyaan tentang materi-materi operasi pada bilangan real yang sudah dikenal. Pertanyaan-pertanyaan tersebut misalnya seperti ini.

> *Apa yang kalian ingat operasi pada bilangan real? Sifat apa saja yang berlaku pada penjumlahan bilangan real? Sifat apa saja yang berlaku pada perkalian bilangan real? Mengapa?*

Dalam kegiatan ini, ajak semua peserta didik untuk berpikir apa yang telah peserta didik pelajari tentang operasi pada bilangan real. Jika perlu, undang salah satu atau beberapa peserta didik untuk mengelaborasi secara lebih jauh materi-materi prasyarat tersebut.

Selanjutnya, Bapak/Ibu guru dapat menceritakan bagaimana operasi pada vektor. Kegiatan ini bertujuan untuk mengenalkan bagaimana operasi penjumlahan bilangan kompleks.

Di kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat bercerita kembali bagaimana operasi yang berlaku pada vektor. Setelah itu, fokuskan cerita tersebut kepada bilangan kompleks dapat dipandang seperti vektor, tetapi tidak mempunyai arah. Di akhir cerita tersebut, mintalah peserta didik untuk penjumlahan dua bilangan kompleks pada Gambar 1.3. Untuk memahami hal tersebut, berilah peserta didik waktu beberapa menit terlebih dahulu untuk berpikir.

Kesimpulan Kegiatan pemanasan pada subbab ini diperuntukkan untuk memberikan pemahaman bagaimana penjumlahan dari dua bilangan kompleks.

b. Aktivitas 1

Aktivitas ini merupakan kelanjutan dari aktivitas pemanasan. Tujuan dari aktivitas ini adalah untuk mengajak peserta didik memahami penjumlahan dua bilangan kompleks.

Kegiatan Bapak/Ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang bagaimana operasi penjumlahan dua vektor. Ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya tentang penjumlahan dua bilangan kompleks dengan mengerjakan Mari, mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.7

Mari, Mencoba 1.7

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 1 - i$, maka $z_1 + z_2 = 2 + 3i + (1 - i) = (2 + 1) + i(3 - 1) = 3 + 2i$. Selanjutnya $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + 2i$, maka diperoleh $z_3 + z_1 = (3 + 2i) + (2 + 3i) = 5 + 5i$.

Setelah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba pada Contoh 1.7, Bapak/Ibu guru dapat menjelaskan Definisi 1.5 tentang perkalian skalar dengan bilangan kompleks. Agar pemahaman peserta didik tentang perkalian skalar dengan bilangan kompleks lebih baik lagi, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.8

Mari, Mencoba 1.8

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $z_1 = -2 - 4i$ dan $z_2 = -8 + 6i$, maka $3z_1 = 3(-2-4i) = -6-12i$.
Selanjutnya $3z_1 - 2z_2 = -6 - 12i - 2(-8+6i) = 10 - 24i$.

Selanjutnya, agar peserta didik dapat memahami sifat-sifat pada bilangan kompleks, bentuklah kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan sifat Operasi pada Bilangan Kompleks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk memecahlan masalah yang diberikan pada aktivitas eksplorasi.

Eksplorasi Mengenal Bentuk Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian

$z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = -2 + 3i$ dan dua skalar, yaitu $c = -4$ dan $d = 7$.

1. Hasil penjumlahan dua bilangan kompleks berikut.
   $z_1 + z_2 = 4 + i$
   $z_2 + z_1 = 4 + i$
   Kesimpulan: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Hasil penjumlahan tiga bilangan kompleks berikut.
   $(z_1 + z_2) + z_3 = 2 + 4i$
   $z_1 + (z_2 + z_3) = 2 + 4i$
   Kesimpulan: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Bilangan kompleks nol adalah bilangan kompleks yang semua bagian real dan imajinernya nol, 0=(0,0). Tentukan penjumlahan z_1 dengan 0.
   $z_1 + 0 = 1 - i$

4. Tentukan hasil penjumlahan suatu bilangan kompleks dengan negatifnya berikut.

   $z_1 + (-z_1) = 0 = 0 + 0i$

5. Hasil perkalian skalar berikut.

   $c(dz_1) = -28 + 28i$

   $(cd)z_1 = -28 + 28i$

   Kesimpulan: $c(dz_1) = (cd)z_1$

6. Hasil perkalian skalar dan penjumlahan bilangan kompleks berikut.

   $(c + d)z_1 = 3 - 3i$

   $cz_1 + dz_1 = 3 - 3i$

   Kesimpulan: $(c + d)z_1 = cz_1 + dz_1$

7. Hasil perkalian skalar dengan penjumlahan dua bilangan kompeks berikut.

   $c(z_1 + z_2) = -16 - 4i$

   $cz_1 + cz_2 = -16 - 4i$

   Kesimpulan: $c(z_1 + z_2) = cz_1 + cz_2$

8. Tentukan hasil perkalian skalar 0 dan 1 dengan bilangan kompleks z_1 berikut.

   $1(z_1) = 1 - i$

   $0(z_1) = 0$

Setelah peserta didik mengerjakan eksplorasi, Bapak/Ibu guru meminta peserta didik menyampaikan jawaban yang telah mereka peroleh dari aktivitas ekplorasi di atas. Kemudian, jelaskan sifat-sifat operasi penjumlahan bilangan kompleks dan perkalian skalar dengan bilangan kompleks pada Sifat 1.1.

Agar pemahaman peserta didik tentang sifat-sifat Operasi pada Bilangan Kompleks meningkat, minta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.9 agar peserta didik lebih memahami hasil eksplorasi yang dikerjakan.

Mari, Mencoba 1.9

Alternatif Penyelesaian

Untuk menunjukkan persamaan yang diberikan, kita gunakan sifat asosiatif perkalian skalar dengan bilangan kompleks. Untuk sembarang bilangan

kompleks z, berlaku: $3z-\frac{1}{2}(2z)=3z-\left(\frac{1}{2}\times 2\right)z=3z-z=2z$. Jadi, terbukti bahwa $3z-\frac{1}{2}(2z)=2z$.

Kesimpulan Di akhir Aktivitas 1, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mengulas kembali pembelajaran yang telah dilakukan. Dalam ulasan ini, pertimbangkan untuk menanyakan beberapa pertanyaan panduan berikut.

- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian menjumlahkan dua bilangan kompleks?
- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian mengalikan skalar dengan bilangan kompleks?

c. Aktivitas 2

Setelah memahami tentang penjumlahan dua bilangan kompleks dan perkalian skalar dengan bilangan kompleks pada aktivitas pertama, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan aktivitas kedua. Tujuan aktivitas kedua ialah agar peserta didik dapat memahami operasi lain pada bilangan kompleks seperti perkalian dua bilangan kompleks dan pembagian dua bilangan kompleks.

Kegiatan Bapak/Ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang bagaimana sifat distributif perkalian dengan penjumlahan yang telah dipelajari di SMP. Ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya tentang sifat tersebut dengan mengamati perkalian dua bilangan kompleks pada Contoh 1.10, kemudian mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.10.

Mari, Mencoba 1.10

Alternatif Penyelesaian

Dengan memanfaatkan cara serupa seperti Contoh 1.8, diperoleh $z_1 \times z_2 = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$.

Setelah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba 1.10, Bapak/Ibu guru menjelaskan tentang bentuk perkalian dua bilangan kompleks

$z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ secara umum dengan memanfaatkan sifat distributif perkalian untuk penjumlahan sehingga diperoleh $z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Selanjutnya, agar peserta didik dapat memahami sifat-sifat pada perkalian bilangan kompleks, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk menyelesaikan masalah yang diberikan pada aktivitas eksplorasi.

Eksplorasi – Bagaimana Sifat-Sifat Operasi Perkalian Bilangan Kompleks?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $z_1 = (1, -1) = 1 - i$, $z_2 = (3, 2) = 3 + 2i$, dan $z_3 = (-2, 3) = -2 + 3i$ dan dua skalar, yaitu $c = -4$ dan $d = 7$.

1. Hasil perkalian dua bilangan kompleks berikut.
   $z_1 \times z_2 = 5 - i$
   $z_2 \times z_1 = 5 - i$
   Kesimpulan: $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
2. Hasil perkalian tiga bilangan kompleks berikut.
   $(z_1 \times z_2) \times z_3 = -7 + 17i$
   $z_1 \times (z_2 \times z_3) = -7 + 17i$
   Kesimpulan: $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$
3. Hasil kalian z_1 dengan 1 adalah $z_1 \times 1 = 1 - i$
   Kesimpunan: $z_1 \times 1 = z_1$
4. Hasil perkalian bilangan kompleks dengan penjumlahan bilangan kompleks
   $z_1(z_2 + z_3) = 6 + 4i = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$

Setelah peserta didik mengerjakan eksplorasi, Bapak/Ibu guru meminta peserta didik menyampaikan jawaban yang telah mereka peroleh dari aktivitas ekplorasi di atas. Kemudian, jelaskan sifat-sifat operasi perkalian bilangan kompleks pada Sifat 1.2.

Agar pemahaman peserta didik tentang sifat-sifat perkalian bilangan kompleks meningkat, minta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.11 agar peserta didik lebih memahami hasil eksplorasi yang dikerjakan.

Mari, Mencoba 1.11

Sifat-Sifat Perkalian Operasi pada Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian

Untuk menunjukkan persamaan yang diberikan, kita gunakan sifat distributif bersama dengan sifat komutatif. Perhatikan bahwa:

$(z_1 - z_2)^2 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)$	Persamaan yang diberikan
$= z_1(z_1 - z_2) - z_2(z_1 - z_2)$	Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
$= (z_1 z_1 - z_1 z_2) + (-z_2 z_1 + z_2 z_2)$	Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
$= z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$	
Jadi, terbukti bahwa $(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$	Sifat komutatif perkalian

Setelah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba pada Contoh 1.11, Bapak/Ibu guru dapat menjelaskan invers bilangan kompleks yang digunakan dalam pembagian dua bilangan kompleks. Agar pemahaman peserta didik tentang invers bilangan kompleks lebih baik lagi, bisa meminta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.12 dan mari berfikir kritis.

Mari, Mencoba 1.12

Invers bentuk bilangan kompleks

Alternatif Penyelesaian

Karena $z_1 = 1 - i$ dan $z_2 = 2 + 3i$, diperoleh $z_1 + z_2 = 3 + 2i$. Perhatikan untuk bilangan kompleks $z = x + iy$, diperoleh bentuk invers $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$. Akibatnya, diperoleh invers dari $z_1 + z_2 = 3 + 2i$. adalah $z^{-1} = \frac{3}{(3)^2 + (2)^2} - i\frac{2}{(3)^2 + (2)^2} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ atau dapat dituliskan $(z_1 + z_2)^{-1} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$.

Mari Berpikir Kritis

Misalkan $z_1 = 1 + 3i$ dan $z_2 = 2 - i$ maka diperoleh $z = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \times (z_2^{-1})$. Karena $z_2^{-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, maka diperoleh $z = \frac{z_1}{z_2} = (1 + 3i) \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

Jadi, bagian real z adalah $-\frac{1}{5}$ dan bagian imajiner z adalah $\frac{7}{5}$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat kesimpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menghitung operasi pada bilangan kompleks, mungkin saja peserta didik mengalami kesalahan dalam perhitungan. Oleh karena itu, Bapak/Ibu guru dapat mengingatkan kepada peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan perhitungan.

Kesimpulan mintalah beberapa kelompok untuk mengomunikasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang sifat operasi-operasi pada bilangan kompleks.

d. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab konsep Operasi pada Bilangan Kompleks, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya ialah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana cara kalian menjumlahkan dua bilangan kompleks?
- Bagaimana cara kalian mengalikan dua bilangan kompleks?
- Sifat-sifat operasi pada bilangan kompleks apa saja yang kalian ketahui? Bagaimana cara kalian menggunakan sifat-sifat tersebut tersebut?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami operasi pada bilangan kompleks, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan B nomor 1, 4, 7. Beri waktu 10–15 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Operasi pada Bilangan Kompleks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada Buku Siswa nomor 5 – 8.

3. Kegiatan Tindak Lanjut.

a. Latihan

Latihan B

Alternatif Penyelesaian

1. *Benar.*
2. *Salah.*
3. *Salah.*
4. $z_1 + z_2 = 5 - i$ dan $z_1 \times z_2 = 12 - 5i$.
5. $z_1 + z_2 = \left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{2} - 3)i$ dan $z_1 \times z_2 = \frac{9}{2}\sqrt{2} - 8i$
6. $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$
7. i
8. $x = \frac{1}{4}$ dan $y = -\frac{1}{4}$
9. $x = 1\frac{4}{3}$ dan $y = 1\frac{4}{3}$

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal-soal Latihan B nomor 2, 3, 5, 6, 8 dan 9. Soal-soal tersebut diharapkan dapat menjaga dan mengembangkan pengetahuan dan pemahaman peserta didik mengenai konsep bilangan kompleks.

F. Panduan Pembelajaran: Konjugat, Modulus, dan Argumen Bilangan Kompleks Beserta Sifat-sifatnya

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Konjugat, Modulus, dan Argumen Bilangan Kompleks beserta sifat-sifatnya peserta didik diajak untuk memahami bagaimana konjugat dari suatu bilangan kompleks, kemudian modulus suatu bilangan kompleks. Selain itu, peserta didik juga diajak memahami sifat-sifat yang berlaku pada konjugat dan modulus bilangan kompleks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Konjugat, Modulus, dan Argumen Bilangan Kompleks Beserta Sifat-sifatnya, diharapkan peserta didik mampu:

1. Menjelaskan konjugat suatu bilangan kompleks dan sifat-sifatnya.
2. Menjelaskan Arumen suatu bilangan kompleks dan sifat-sifatnya
3. Memahami modulus suatu bilangan kompleks dan sifat-sifatnya.

> Menjelaskan bentuk konjugat, argumen dan modulus bilangan kompleks, serta menggunakan sifat-sifatnya untuk penyelesaian masalah

b. Alat dan Bahan

Alat tulis untuk pembelajaran.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Konjugat, Modulus, dan Argumen Bilangan Kompleks Beserta Sifat-sifatnya, guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara Bapak/Ibu guru memandu peserta didik agar mereka dapat memahami konjugat dan modulus pada kompleks?
- Mengapa konjugat dan modulus pada bilangan kompleks penting untuk dipelajari?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Kegiatan pemanasan bertujuan untuk menarik perhatian semua peserta didik agar terarah ke dalam pembelajaran konjugat dan modulus dari bilangan kompleks. Untuk mengawali pembelajaran di subbab ini, Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali pertanyaan pada subbab A. Pertanyaan-pertanyaan tersebut misalnya seperti ini.

Jika diberikan bilangan kompleks $z = x + iy$, berapakah nilai r?

Dalam kegiatan ini, ajak semua peserta didik untuk berpikir apa yang telah mereka pelajari pada subbab A di bab Bilangan Kompleks. Jika perlu, undang salah satu atau beberapa peserta didik untuk mengelaborasi secara lebih jauh materi-materi prasyarat tersebut.

Selanjutnya, Bapak/Ibu guru dapat menceritakan bagaimana sekawan pada bilangan real. Kegiatan ini bertujuan untuk mengenalkan bagaimana bentuk sekawan (konjugat) pada bilangan kompleks. Selanjutnya, Bapak/Ibu guru dapat bercerita kembali bagaimana konjugat dari bilangan real. Setelah itu, fokuskan cerita bahwa setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ mempunyai bentuk lain sekawan, yakni $\overline{z} = x - iy$. Bentuk ini kita kenal dengan istilah konjugat bilangan kompleks.

Kesimpulan Kegiatan pemanasan ini bertujuan untuk memberikan gambaran kepada peserta didik bagaimana konjugat dari bilangan kompleks.

b. Aktivitas 1

Aktivitas ini merupakan kelanjutan dari aktivitas pemanasan. Tujuan dari aktivitas ini ialah untuk mengajak peserta didik memahami konjugat bilangan kompleks.

Kegiatan Bapak/Ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang bagaimana konjugat dari bilangan. Ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya tentang konjugat bilangan kompleks dengan mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.13

Mari, Mencoba 1.13

Sekawan bilangan kompleks

Alternatif Penyelesaian

a) Bilangan kompleks $2 + i^2 = 2 - 1 = 1$ mempunyai bentuk konjugat $1 - 0i = 1$

b) Perhatikan bahwa $i^{-1} = -i$. Akibatnya, bilangan kompleks $1 + \frac{1}{i} = 1 - i$ mempunyai bentuk konjugat $1 - (-i) = 1 + i$.

c) Bilangan kompleks $1 + 2i$ mempunyai bentuk konjugat $1 - 2i$.

Setelah peserta didik mengerjakan mencoba pada Contoh 1.13, Bapak/Ibu guru dapat menjelaskan Definisi 1.6 tentang konjugat bilangan kompleks. Selanjutnya, untuk melatih berpikir kritis peserta didik, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan aktivitas Mari, Berpikir Kritis.

Mari Berpikir Kreatif

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa agar $z = \bar{z}$, dicari bilangan real x dan y sedemikian rupa sehingga $x + iy = x - iy$. Memanfaatkan persamaan dua bilangan kompleks diperoleh nilai y yang memenuhi $y = -y$ adalah $y = 0$ sehingga bilangan kompleks $z = x + iy$ yang sama dengan konjugatnya adalah $z = x$ untuk x bilangan real.

Setelah mengerjakan aktivitas Mari, Berpikir Kritis, agar peserta didik dapat memahami sifat-sifat pada konjugat bilangan kompleks, bentuklah kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan sifat pada konjugat bilangan kompleks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk menyelesaikan masalah yang diberikan pada aktivitas eksplorasi.

Eksplorasi— Sifat-sifat konjugat bilangan kompleks

Alternatif Penyelesaian

Untuk menemukan jawabannya, misalkan kita diberikan dua bilangan kompleks, yaitu: $z_1 = (1,-1) = 1 - i$ dan $z_2 = (3,2) = 3+2i$,

1. Hasil konjugat dari penjumlahan dua bilangan kompleks berikut.

   $\overline{z_1 + z_2} = 4 - i$

$\overline{z_1} + \overline{z_2}$ = 4 − i

Kesimpulan: = $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. Hasil konjugat dari pengurangan dua bilangan kompleks berikut.

$\overline{z_1 - z_2}$ = -2 + 3i

$\overline{z_1} - \overline{z_2}$ = -2 + 3i

Kesimpulan: $\overline{z_1 - z_2}$ = $\overline{z_1} - \overline{z_2}$

3. Hasil konjugat dari perkalian dua bilangan kompleks berikut.

$\overline{z_1 \times z_2}$ = 5 + i

$\overline{z_1 \times z_2}$ = 5 + i

Kesimpulan: $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

4. Hasil konjugat dari pembagian dua bilangan kompleks berikut.

$\overline{z_1 : z_2} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

$\overline{z_1} : \overline{z_2} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

Kesimpulan: $\overline{z_1 : z_2}$ = $\overline{z_1} : \overline{z_2}$

5. Hasil konjugat dari invers bilangan kompleks $z_1 = 1 - i$ adalah

$\overline{z^{-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$(\bar{z})^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Kesimpulan: $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$

6. Diberikan bilangan kompleks z_1 = (1,-1) = 1 − i maka diperoleh $\overline{z_1} = 1 + i$.

Lebih jauh, $\overline{\overline{z_1}}$ = 1 − i

Kesimpulan: $\overline{\overline{z_1}}$ = z_1

7. Hasil perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah

$z_1 - \overline{z_1}$ = 2

$[\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$ = 2

Kesimpulan: $z_1 - \overline{z_1}$ = $[\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

8. Tentukan hasil pengurangan bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah:

$z_1 - \overline{z_1}$ = 2

$2i\text{Im}(z)$ = 2

Kesimpulan: $z_1 - \overline{z_1}$ = $2i\text{Im}(z)$

9. Hasil penjumlahan bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah

$z_1 + \overline{z_1}$ = 2

$2Re(z)$ = 2

Kesimpulan: $z_1 + \overline{z_1}$ = $2\text{Re}(z)$

Setelah peserta didik mengerjakan eksplorasi, Bapak/Ibu guru meminta peserta didik menyampaikan jawaban yang telah mereka peroleh dari aktivitas ekplorasi tersebut. Kemudian, jelaskan sifat-sifat konjugat bilangan kompleks pada Sifat 1.4.

Agar pemahaman peserta didik tentang konjugat bilangan kompleks makin baik, minta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.14.

Mari, Mencoba 1.14

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa untuk bilangan kompleks $z = x + iy$, diperoleh $2i + 2\overline{z} = 2i + 2(x - iy) = 2x + i(2 - y)$. Dengan memanfaatkan definisi konjugat atau Sifat 3.1 (1) diperoleh $\overline{2i + 2\overline{z}} = 2x + i(y - 2)$ Karena $Re\left(\overline{2i + 2\overline{z}}\right) = 8$ diperoleh $x = 4$ dan y adalah bilangan real.

Kesimpulan Di akhir Aktivitas 1, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mengulas kembali pembelajaran yang telah dilakukan. Dalam ulasan ini, pertimbangkan untuk menanyakan beberapa pertanyaan panduan berikut.

- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian menentukan konjugat bilangan kompleks?
- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana sifat-sifat pada konjugat bilangan kompleks?

c. Aktivitas 2

Setelah memahami tentang konjugat bilangan kompleks pada aktivitas pertama, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan aktivitas kedua. Tujuan aktivitas kedua ialah agar peserta didik dapat memahami modulus pada bilangan kompleks.

Kegiatan Bapak/Ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang bagaimana modulus yang telah dipelajari pada subbab A, tetapi dengan notasi yang berbeda. Ajaklah peserta didik memahami pengertian modulus pada Definisi 1.7. Kemudian, terapkan pengetahuan dan pemahamannya tentang pengertian modulus bilangan kompleks dengan mengerjakan Mari, Mencoba Contoh 1.15.

Mari, Mencoba 1.15

Modulus bilangan kompleks

Alternatif Penyelesaian

1. Bilangan kompleks $z_1 = 2 + i^2 = 1$ mempunyai modulus $|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$
2. Bilangan $z_2 = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i$ mempunyai modulus $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
3. Bilangan kompleks $z_3 = 1 + 2i$ mempunyai modulus $|z_3| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

Selanjutnya, agar peserta didik dapat memahami sifat-sifat modulus bilangan kompleks, bentuklah kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan sifat modulus bilangan kompleks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk menyelesaikan masalah yang diberikan pada aktivitas eksplorasi.

Eksplorasi — Modulus Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian

$z_1 = (1,-1) = 1 - i$ dan $z_2 = (3,2) = 3 + 2i$,

1. Modulus dari bilangan kompleks $z_1 - z_1, \overline{z_1}$ adalah

   $|z_1| = \sqrt{2}$

   $|-z_1| = \sqrt{2}$

   $|\overline{z_1}| = \sqrt{2}$

   Kesimpulan: $|z_1| = |-z_1| = |\overline{z_1}|$
2. Hasil modulus dari pengurangan dua bilangan kompleks adalah.

   $|z_1 - z_2| = \sqrt{13}$

   $|z_2 - z_1| = \sqrt{13}$

   Kesimpulan: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
3. Hasil kuadrat dari modulus bilangan kompleks berikut.

   $|z_1|^2 = 2$

   $|z_1^2| = 2$

Kesimpulan: $|z_1|^2 = |z_1^2| = z_1 \times \overline{z_1}$

4. Hasil perkalian dari modulus bilangan kompleks adalah.

   $|z_1| \times |z_2| = \sqrt{26}$

   $|z_1 \times z_2| = \sqrt{26}$

   Kesimpulan: $|z_1| \times |z_2| = |z_1 \times z_2|$

5. Hasil pembagian dari modulus dua bilangan kompleks adalah.

   $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

   $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{2}{13}}$

   Kesimpulan $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

6. Hasil penjumlahan dari modulus bilangan kompleks adalah.

   $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2} + \sqrt{13}$

   $|z_1 + z_2| = \sqrt{17}$

   Kesimpulan: $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$, lebih jauh diperoleh $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menghitung modulus pada bilangan kompleks, mungkin saja peserta didik mengalami kesalahan dalam perhitungan. Oleh karena itu, Bapak/Ibu guru dapat mengingatkan kepada peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan perhitungan.

Agar pemahaman peserta didik tentang modulus bilangan kompleks makin baik, minta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 1.16.

Mari, Mencoba 1.16

Modulus Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa untuk bilangan kompleks $z = \frac{1-2i}{3+4i}$ dapat dipandang menjadi $z = \frac{1-2i}{3+4i}$ untuk $z_1 = 1 - 2i$ dan $z_2 = 3 + 4i$ sehingga diperoleh $|z|\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Kerena $|z| = |\bar{z}|$, diperoleh $|\bar{z}| = \frac{1}{5}\sqrt{5}$.

Setelah peserta didik memahami tentang modulus bilangan kompleks, ajaklah peserta didik memahami tentang argumen utama bilangan kompleks pada Definisi 1.8. Selanjutnya, minta peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba pada Contoh 1.17.

Mari, Mencoba 1.17

Argumen Utama Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian

(a) Perhatikan bahwa, bentuk polar dari bilangan kompleks $1+\sqrt{3}\,i$ adalah $z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ sehingga diperoleh argumen utama dari z adalah 60°.

(b) Bentuk polar dari bilangan kompleks $-i$ adalah $z = (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ sehingga diperoleh argumen utama dari $-i$ adalah 270°.

Selain argumen utama, Bapak/Ibu guru dapat menjelaskan bahwa argumen pada bilangan kompleks tidak tunggal. Agar peserta didik dapat memahami lebih baik tentang argumen bilangan kompleks, mintalah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba pada Contoh 1.18

Mari, Mencoba 1.18

Argumen Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian

(a) Berdasarkan alteratif jawaban pada Mari, Mencoba Contoh 1.17, yakni argumen utama dari $1+\sqrt{3}\,i$ adalah 60° sehingga diperoleh $Arg(1+\sqrt{3}\,i) = \{60^\circ + 2k\pi : \text{untuk } k \text{ bilangan bulat}\}$

(b) Berdasarkan alteratif jawaban pada Mari, Mencoba Contoh 1.17, yakni argumen utama dari $-i$ adalah 270° sehingga diperoleh $Arg(-1) = \{270^\circ + 2k\pi : \text{untuk } k \text{ bilangan bulat}\}$.

Setelah peserta didik memahami tentang modulus dan argumen pada bilangan kompleks. Bapak/Ibu guru dapat menjelaskan kesamaan dua bilangan kompleks yang melibatkan modulus dan argumen dari bilangan kompleks tersebut. Selanjutnya, agar peserta didik memahami kesamaan dua bilangan kompleks, mintalah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba pada Contoh 1.19.

Mari, Mencoba 1.19

Alternatif Penyelesaian

(a) Perhatikan bahwa $|z_1| = 2 = |z_2|$, $Arg(z_1) = 0^o$ dan $Arg(z_2) = 360^o$. Karena $Arg(z_1) - Arg(z_2) = 2\pi$, diperoleh $z_1 = z_2$.

(b) Karena $|z_1| \neq |z_2|$, diperoleh $z_1 \neq z_2$.

Bapak/Ibu guru dapat melanjutkan pembahasan tentang argumen bilangan kompleks dengan membahas sifat-sifat argumen bilangan kompleks pada Sifat 1.6. Agar peserta didik dapat memahami lebih baik lagi tentang sifat argumen bilangan kompleks, mintalah mereka mengerjakan Mari, Mencoba pada Contoh 1.20.

Mari, Mencoba 1.20

Penyelesaian

Perhatikan bahwa, bilangan kompleks $z_1 = 2$ dapat dinyatakan menjadi $z_2 = 2(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)$, akibatnya $Arg(z_1) = 0^o$, sedangkan $Arg(z_2) = 360^o$. Dengan memanfaatkan sifat argumen, diperoleh argumen hasil perkalian z_1 dan z_2 adalah $Arg(z_1 \times z_2) = \{360^\circ + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, sedangkan argumen hasil pembagian z_1 dan z_2 adalah $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{-360^\circ + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Selanjutnya, agar peserta didik dapat memahami sifat argumen pada Sifat 1.6, mintalah peserta didik mengerjakan aktivitas Mari, Berkolaborasi. Bentuklah kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan sifat agumen bilangan kompleks pada Sifat 1.6. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam

mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk menyelesaikan masalah yang diberikan pada aktivitas eksplorasi.

Mari Berkolaborasi

Alternatif Penyelesaian

Misalkan, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ adalah dua bilangan kompleks, nyatakan bilangan kompleks z_1 dan z_2 dalam bentuk eksponensial sehingga didapat $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Dengan memanfaatkan sifat eksponen, diperoleh $z_1 \times z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ dan $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$. Jadi, diperoleh $Arg(z_1 \times z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi = Arg(z_1) + Arg(z_2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ dan $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1 - \theta_2 ++ 2k\pi = Arg(z_1) - Arg(z_2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Kemudian, misalkan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, ..., $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, manfaatkan sifat eksponensial diperoleh $z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n)}$. Jadi, diperoleh $Arg(z_1 z_2 \cdots z_n) = \{\theta_1 + \cdots + \theta_n + 2k\pi = Arg(z_1) + \cdots + Arg(z_n) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Kesimpulan Mintalah beberapa kelompok untuk mengomunikasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang sifat modulus pada bilangan kompleks.

c. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab konsep konjugat dan modulus bilangan kompleks, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya adalah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana menentukan konjugat bilangan kompleks?
- Sifat-sifat apa saja yang berlaku pada konjugat bilangan kompleks?
- Bagaimana menentukan modulus bilangan kompleks?
- Sifat-sifat modulus bilangan kompleks apa saja yang kalian ketahui? Bagaimana cara kalian menggunakan sifat-sifat tersebut?
- Bagaimana menentukan argumen bilangan kompleks?
- Sifat-sifat argumen bilangan kompleks apa saja yang kalian ketahui? Bagaimana cara kalian menggunakan sifat-sifat tersebut?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami operasi pada bilangan kompleks, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan C nomor 1, 4, 7. Beri waktu 10−15 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Selain itu, Bapak/Ibu guru dapat memberikan kegiatan pendinginan dengan melakukan kegiatan mengerjakan soal-soal bilangan kompleks melalui aplikasi quizizz pada tautan berikut.

Alternatif Pembelajaran

Sebagai alternatif pembelajaran, Bapak/Ibu guru dapat menggunakan tautan berikut untuk membuat pertanyaan-pertanyaan tentang bilangan kompleks.

Tautan: *https://quizizz.com*

Refleksi Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam Subbab Konjugat, Modulus dan Argumen Bilangan Kompleks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada Buku Siswa nomor 9 − 14.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Latihan C

Konjugat, Modulus, dan argumen Bilangan Kompleks

Alternatif Penyelesaian.

1. *Benar.*
2. *Salah.*
3. *Benar.*
4. *Salah.*
5. Perhatikan bahwa $z = \frac{3+3i}{2+3i} + \frac{4i}{2-3i} = \frac{3+5i}{13}$ sehingga diperoleh konjugat z adalah $\bar{z} = \frac{3-5i}{13}$ dan modulus dari z adalah $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{169}}$.

6. Misalkan, $z_1 = a + ib$ dan $z_2 = c + id$ adalah bilangan kompleks, maka $z_1 \times \overline{z_2} + \overline{z_1} \times z_2 = 2ac + 2bd$. Jadi, $z_1 \times \overline{z_2} + \overline{z_1} \times z_2$ bernilai bilangan real.
7. Misalkan $z = x + iy$ dengan $Im(z) \neq 0$, amati bahwa $z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$. Karena $z + \frac{1}{z}$ bernilai real, haruslah $y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$. Di lain pihak, $y \neq 0$ sehingga diperoleh $x^2 + y^2 = 1$. Hal ini mengakibatkan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.
8. Misalkan $z = x + iy$ dengan $|z| = 1$, diperoleh $x^2 + y^2 = 1$. Di lain pihak $z^2 + \bar{z}^2 = 2(x^2 - y^2)$ sehingga diperoleh $|z^2 + \bar{z}^2| = 2(x^2 - y^2) = 1$. Dengan memanfaatkan eliminasi, diperoleh $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ serta $y = \frac{1}{2}$ dan $y = -\frac{1}{2}$. Jadi, z yang memenuhi adalah $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$, dan $z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$
9. $r = 1$ dan $\theta = 15^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal-soal Latihan C nomor 2, 3, 5, 6, 8 dan 9. Soal-soal tersebut diharapkan dapat menjaga dan mengembangkan pengetahuan dan pemahaman peserta didik mengenai konsep modulis, argumen dan kongjurat bilangan kompleks.

G. Alternatif Penyelesaian: Uji Kompetensi

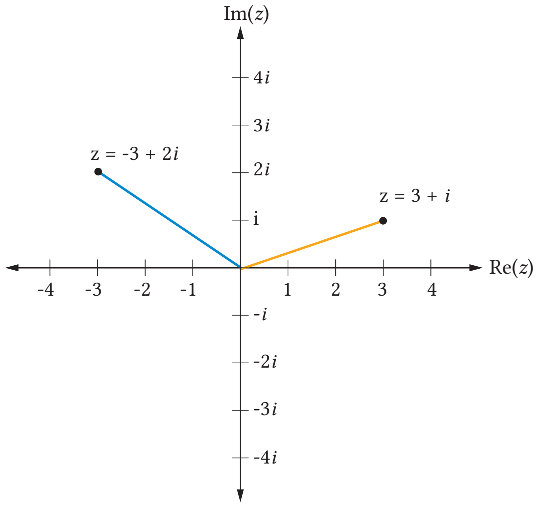
1. Uji Pemahaman

1. *Benar*
2. *Benar*
3. *Salah*
4. *Salah*
5. Bentuk kartesiusnya $z = 4 - 3i$ dan bentuk polarnya $z = 5(\cos 323,13^\circ + i \sin 323,13^\circ)$.
6. Bentuk kartesiusnya $z = -2 - 2i$ dan bentuk polarnya $z = 2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$.

Bilangan kompleks di bawah ini pada bidang kompleks.

7. (3, 1)

8. (−3, 2)



Operasi-Operasi pada Bilangan Kompleks.

Diberikan bilangan kompleks $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -2 - 2i$ $z_3 = 3 + i$, $z_4 = -3 + 2i$. Hitunglah:

9. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2 - 2i$

10. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{-41}{52} + i\frac{55}{52}$

11. $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_3^2 + z_4^2} = \frac{187}{205} - i\frac{166}{205}$

12. $y = \frac{3}{2}x$

13. $x = -1 + \sqrt{5}\,i$ atau $x = -1 - \sqrt{5}\,i$

14. $2x^2 - (1 + i)x + (1 + i) = 0$

15. $\bar{z} = 4 + 3i$, $|z| = 5$ dan $Arg(z) = 323,13^\circ + 2k\pi$, k bilangan bulat.

16. $\bar{z} = -2 + 2i$, dan $Arg(z) = 225^\circ + 2k\pi$, k bilangan bulat.

2. Penerapan

17. Jika $b^2 - 4ac \geq 0$ maka solusi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ atau $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. sedangkan, jika $b^2 - 4ac < 0$,

solusi persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$ adalah $x_1=\dfrac{-b+i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ atau $x_2=\dfrac{-b-i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

18. Berdasarkan identitas Euler diketahui $re^{i\pm\varphi}=r(\cos(\pm\varphi)+i\sin(\pm\varphi))$ sehingga bentuk polar dari $\Psi_{2p}=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}r\sin\varphi e^{i\pm\varphi}f(r)$ adalah $\Psi_{2p}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta f(r)(\cos(\mp\varphi)+i\sin(\mp\varphi))$.

3. Penalaran

19. $i^{2021}+i^{2020}+i^{2019}+\cdots+i+1=1-i$.

20. Perhatikan bahwa, $z_1\bar{z}_1=|z_1|^2=1$ sehingga diperoleh $z_1=\dfrac{1}{\bar{z}_1}$. Dengan cara yang serupa didapat $z_2=\dfrac{1}{\bar{z}_2}$. Misalkan $A=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, diperoleh $\bar{A}=\dfrac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=A$. Karena $\bar{A}=A$, bagian imajiner dari $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_2z_2}$ bernilai nol.

4. Proyek

Berbeda tetapi tetap sama

Penyelesaian dari proyek ini akan berbeda-beda, bergantung pada pemilihan bilangan kompleks setiap kelompok. Berikut ini adalah salah satu contoh jawaban dari proyek untuk bilangan kompleks yang dipilih.

- Misalkan, setiap satu kelompok karteisus, kelompok polar, dan kelompok eksponen memberikan bilangan kompleks sebagai berikut.

  Kelompok kartesius : $(2-3i)$

  Kelompok polar : $\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

  Kelompok eksponen : $3e^{i0}$

- Setelah setiap kelompok bertukar bentuk, jawaban yang dibuat oleh setiap kelompok adalah sebagai berikut.

  i. Ubahlah bilangan kompleks yang ada ke dalam bentuk sesuai nama kelompok.

  - Jawaban kelompok kartesius

Bentuk bilangan kompleks dari kelompok polar dan kelompok eksponen dinyatakan dalam bentuk kartesius adalah $\sqrt{2}\left(\cos 45^{\circ}+i \sin 45^{\circ}\right)=1+i$ dan $3 e^{i 0}=3(\cos \theta+i \sin \theta)$.

- Jawaban kelompok polar

  Bentuk bilangan kompleks dari kelompok kartesius dan kelompok eksponen dinyatakan dalam bentuk polar adalah $2-3 i=\sqrt{13}\left(\cos \left(303,69^{\circ}\right)+i \sin \left(303,69^{\circ}\right)\right)$ dan $3 e^{i 0}=3(\cos \theta+i \sin \theta)$.

- Jawaban kelompok eksponen

  Bentuk bilangan kompleks dari kelompok kartesius dan kelompok polar dinyatakan dalam bentuk eksponen adalah $2-3 i=\sqrt{13}\, e^{i 303,69}$ dan $\sqrt{2}\left(\cos 45^{\circ}+i \sin 45^{\circ}\right)=\sqrt{2}\, e^{i 45}$.

ii. Tentukan bentuk hasil pangkat 2021 dari bilangan kompleks tersebut.

- Jawaban kelompok kartesius

  Hasil pangkat 2021 dari $1+i$ dan $3(\cos \theta+i \sin \theta)$ mungkin tidak akan mudah jika dihitung bentik kartesius sehingga untuk mempermudah hal tersebut, kita perlu mengubah ke dalam bentuk ekponen sehingga didapat $(1+i)^{2021}=\left(\sqrt{2}\, e^{i 45}\right)^{2021}=2^{2010} \sqrt{2}\, e^{i 45 \times 2021}$ dan $(3(\cos \theta+i \sin \theta))^{2021}=3^{2021} e^{i 2021 \times \theta}$.

- Jawaban kelompok polar

  Hasil pangkat 2021 dari $2-3 i=\sqrt{13}\left(\cos \left(303,69^{\circ}\right)+i \sin \left(303,69^{\circ}\right)\right)$ dan $3 e^{i 0}=3(\cos \theta+i \sin \theta)$ mungkin tidak akan mudah jika dihitung dalam bentuk polar sehingga untuk mempermudah hal tersebut, kita perlu mengubah ke dalam bentuk ekponen sehingga didapat $(2-3 i)^{2021}=(\sqrt{13})^{2021} e^{i 2021 \times 303,69}$ dan $(3(\cos \theta+i \sin \theta))^{2021}=3^{2021} e^{i 2021 \times \theta}$

- Jawaban kelompok eksponen

  Hasil pangkat 2021 dari $\sqrt{13}\, e^{i 303,69}$ dan $\sqrt{2}\, e^{i 45}$ adalah $\left(\sqrt{13}\, e^{i 303,69}\right)^{2021}=13^{1010} \sqrt{13}\, e^{i 303,69 \times 2021}$ dan $\left(\sqrt{2}\, e^{i 45}\right)^{2021}=2^{1010} \sqrt{2}\, e^{i 45 \times 2021}$.

iii. Tentukan bagian real dan imajiner dari hasil perpangkatan 2021 dari bilangan kompleks tersebut.

- Jawaban kelompok kartesius

Bagian real dari $1+i$ dan $3(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah 1 dan $3\cos\theta$, sedangkan bagian imajiner dari $1+i$ dan $3(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah 1 dan $3\sin\theta$.

- Jawaban kelompok polar
  Bagian real dari $\sqrt{13}(\cos(303,69^\circ) + i\sin(303,69^\circ))$ dan $3(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah $\sqrt{13}\cos(303,69^\circ)$ dan $3\cos\theta$, sedangkan bagian imajiner dari $\sqrt{13}(\cos(303,69^\circ) + i\sin(303,69^\circ))$ dan $3(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah $\sqrt{13}\sin(303,69^\circ)$ dan $3\sin\theta$.
- Jawaban kelompok eksponen
  Untuk menentukan bagian real dan imanjiner dari $13^{1010}\sqrt{13}\,e^{i303,69\times 2021}$ dan $2^{2010}\sqrt{2}\,e^{i45\times 2021}$, akan lebih mudah diubah terlebih dahulu dalam bentuk kartesius atau bentuk polar, yakni $13^{1010}\sqrt{13}\,e^{i303,69\times 2021} = 13^{1010}\sqrt{13}$ $(\cos(303,69\times 2021) =+ i\sin(303,69\times 2021))$ dan $2^{1010}\sqrt{2}\,e^{i45\times 2021} = 2^{1010}\sqrt{2}(\cos(45\times 2021) =+ i\sin(45\times 2021))$, sehingga bagian real dari $13^{1010}\sqrt{13}\,e^{i303,69\times 2021}$ dan $2^{2010}\sqrt{2}\,e^{i45\times 2021}$ adalah $13^{1010}\sqrt{13}\cos(303,69\times 2021)$ dan $2^{1010}\sqrt{2}\cos(45\times 2021)$ dan bagian imajiner dari $13^{1010}\sqrt{13}\,e^{i303,69\times 2021}$ dan $2^{2010}\sqrt{2}\,e^{i45\times 2021}$ adalah $13^{1010}\sqrt{13}\sin(303,69\times 2021)$ dan $2^{1010}\sqrt{2}\sin(45\times 2021)$.

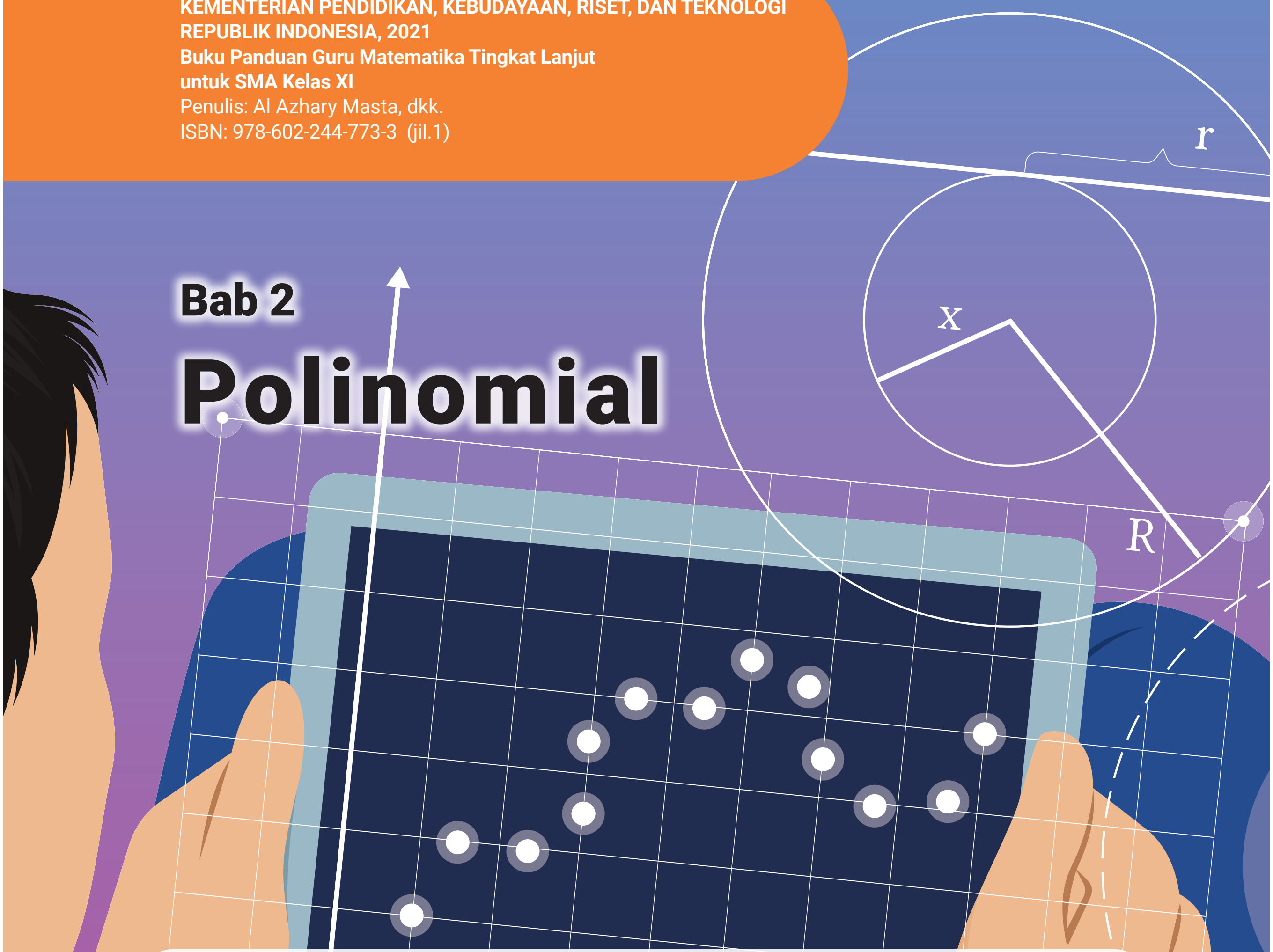
Kesimpulan. Berdasarkan hasil pengerjaan yang dilakukan setiap kelompok diperoleh simpulan:

1. menentukan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks akan lebih mudah jika dalam bentuk kartesius atau polar;
2. menentukan hasil perpangkatan bilangan kompleks akan lebih mudah jika dalam bentuk eksponen.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)

Bab 2

Polinomial

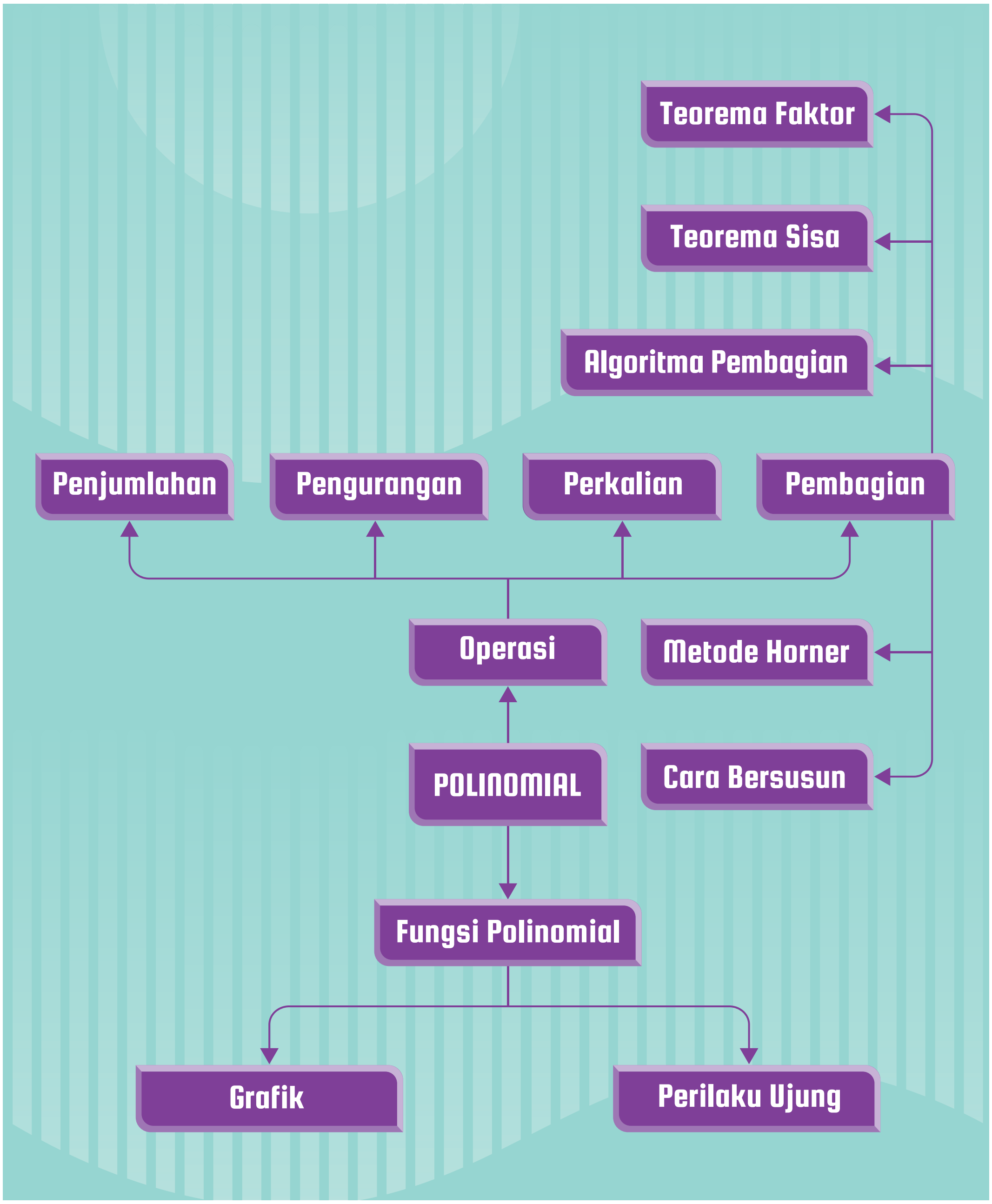


Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Menjelaskan definisi polinomial dan fungsi polinomial serta mengidentifikasi karakteristiknya.
2. Melakukan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian terhadap polinomial.
3. Melakukan pembagian polinomial dan menggunakan Teorema Sisa.
4. Melakukan pemfaktoran polinomial dan menentukan pembuat nol real dan kompleks dari polinomial.
5. Membuktikan identitas polinomial dan menggunakan identitas polinomial untuk melakukan pemfaktoran polinomial.

A. Peta Konsep



Kata Kunci	Polinomial, Operasi pada Polinomial, Algoritma Pembagian, Teorema Sisa, Teorema Faktor, Metode Horner, Fungsi Polinomial, Grafik Fungsi Polinomial, Perilaku Ujung.

B. Gambaran Umum

Di jenjang sekolah menengah pertama, peserta didik telah dikenalkan bentuk-bentuk aljabar dan operasi-operasinya. Di jenjang itu juga, peserta didik telah mempelajari fungsi linear dan karakteristiknya, serta persamaan kuadrat. Lebih lanjut, ketika kelas X, mereka juga telah dikenalkan fungsi kuadrat dan karakteristiknya. Di bab ini, peserta didik akan diajak untuk mengembangkan pengetahuan dan pemahamannya tersebut untuk mempelajari polinomial, fungsi polinomial, dan operasi-operasinya.

Bab ini dimulai dengan pembelajaran mengenai polinomial dan derajatnya. Selanjutnya, peserta didik diajak untuk memodelkan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi polinomial. Karakteristik dari grafik fungsi polinomial, yaitu bentuk umum dan perilaku ujung-ujungnya, kemudian dijelaskan dengan tujuan agar peserta didik mampu menggunakannya untuk menyelesaikan permasalahan.

Setelah peserta didik memiliki pengetahuan mengenai polinomial, selanjutnya peserta didik dipandu untuk menemukan strategi bagaimana melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada polinomial. Untuk melakukannya, peserta didik diajak untuk menggunakan pengetahuan awalnya mengenai penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada bilangan.

Serupa dengan tiga operasi sebelumnya, peserta didik juga diajak untuk menemukan strategi pembagian polinomial dengan cara bersusun menggunakan pengetahuannya tentang pembagian bilangan. Setelah itu, pembagian polinomial bersusun tersebut digunakan lagi untuk menemukan metode Horner. Kedua teknik pembagian polinomial tersebut selanjutnya digunakan oleh peserta didik untuk menentukan nilai fungsi polinomial dengan berdasarkan Teorema Sisa.

Teorema Sisa yang telah dipelajari peserta didik selanjutnya dihubungkan dengan Teorema Faktor. Dengan menggunakan Teorema Faktor tersebut, peserta didik dipandu untuk melakukan pemfaktoran polinomial. Pemfaktoran tersebut selanjutnya digunakan untuk menentukan pembuat nol real dan kompleks dari suatu polinomial. Pembuat nol real tersebut dapat digunakan oleh peserta didik untuk menentukan perpotongan grafik suatu fungsi polinomial dengan sumbu X.

Terakhir, peserta didik dikenalkan dengan identitas polinomial. Di sini, peserta didik diminta untuk membuktikan apakah suatu persamaan polinomial merupakan identitas polinomial atau bukan. Selain itu, peserta didik juga mempelajari bagaimana menggunakan identitas polinomial untuk melakukan pemfaktoran terhadap polinomial.

C. Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Polinomial dan Fungsi Polinomial	7	1. Menjelaskan pengertian polinomial dengan menggunakan konsep monomial. 2. Mengidentifikasi derajat suatu polinomial yang memiliki satu variabel ataupun beberapa variabel. 3. Menjelaskan pengertian fungsi polinomial dan karakteristik grafiknya, yaitu bentuk umum dan perilaku ujung-ujungnya.	1. Polinomial 2. Derajat polinomial 3. Fungsi polinomial dan grafiknya	Monomial, polinomial, derajat, fungsi polinomial, perilaku ujung	Penemuan terbimbing, diskusi	Buku Siswa	*Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. 2017. Aljabar dan Trigonometri. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.*
Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial	5	1. Menggunakan konsep penjumlahan dan pengurangan pada bilangan untuk menemukan dan melakukan kedua operasi tersebut pada polinomial. 2. Melakukan perkalian pada polinomial dengan menggunakan model luas, tabel, dan sifat distributif.	1. Penjumlahan polinomial 2. Pengurangan polynomial 3. Perkalian polinomial	Penjumlahan, pengurangan, perkalian	Penemuan terbimbing, diskusi	Buku Siswa	

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Pembagian Polinomial	10	1. Melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun dan menuliskan hasilnya ke dalam bentuk algoritma pembagian. 2. Menggunakan metode Horner untuk melakukan pembagian polinomial dan menuliskan hasilnya ke dalam bentuk algoritma pembagian. 3. Menggunakan Teorema Sisa untuk menentukan nilai suatu polinomial jika diketahui nilai variabelnya.	1. Pembagian bersusun 2. Metode Horner 3. Teorema Sisa	Pembagian, pembagian bersusun, metode Horner, Teorema Sisa	Penemuan terbimbing, diskusi	Buku Siswa	
Faktor dan Pembuat Nol Polinomial	10	1. Menggunakan Teorema Faktor untuk memfaktorkan polinomial secara komplet. 2. Menentukan hubungan antara faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial. 3. Menentukan semua pembuat nol kompleks dari suatu polinomial.	1. Teorema Faktor 2. Pembuat nol real fungsi polinomial 3. Pembuat nol kompleks fungsi polinomial	Teorema Faktor, pembuat nol, pembuat nol kompleks, perpotongan sumbu *X*	Penemuan terbimbing, diskusi	Buku Siswa	

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Identitas Polinomial	3	1. Membuat identitas polinomial dan membuktikannya. 2. Menggunakan identitas polinomial untuk melakukan pemfaktoran polinomial.	1. Identitas polinomial	Identitas polinomial, pemfaktoran	Penemuan terbimbing, diskusi	Buku Siswa	

A. Panduan Pembelajaran: Polinomial dan Fungsi Polinomial

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Polinomial dan Fungsi Polinomial dibagi menjadi tiga aktivitas pembelajaran. Di aktivitas pertama, peserta didik diminta untuk mengonstruksi sendiri konsep monomial melalui kegiatan pengelompokan bentuk-bentuk aljabar. Di aktivitas kedua, peserta didik dipandu untuk menemukan konsep derajat dari monomial dan polinomial melalui kegiatan pengamatan. Di aktivitas terakhir, peserta didik akan diajak untuk memodelkan permasalahan sehari-hari agar mereka mendapatkan fungsi polinomial.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Polinomial dan Fungsi Polinomial, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan berikut ini.

1. Menjelaskan pengertian polinomial dengan menggunakan konsep monomial.
2. Mengidentifikasi derajat suatu polinomial yang memiliki satu variabel ataupun beberapa variabel.
3. Menjelaskan pengertian fungsi polinomial dan karakteristik grafiknya, yaitu bentuk umum dan perilaku ujung-ujungnya.

b. Alat dan Bahan

Kalkulator grafik Desmos (tidak wajib)

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Polinomial dan Fungsi Polinomial, Bapak/Ibu Guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara Anda membantu peserta didik untuk dapat menemukan sendiri konsep polinomial dan derajatnya?
- Apa saja yang perlu dilakukan oleh peserta didik untuk memodelkan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi polinomial? Mengapa aktivitas pemodelan tersebut penting untuk mengenalkan fungsi polinomial?

- Kesalahan dan miskonsepsi apa yang kemungkinan akan dilakukan oleh peserta didik ketika mengidentifikasi karakteristik grafik fungsi polinomial?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/Ibu Guru dapat memberikan motivasi kepada peserta didik tentang pentingnya mempelajari polinomial dan fungsi polinomial. Hal ini dapat dilakukan dengan menunjukkan sampul Bab 2 Buku Siswa. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk membaca kegiatan eksplorasi "Mengenal Monomial" dan mengerjakan soal nomor 1. Berilah peserta didik beberapa saat untuk mengerjakan soal tersebut, kemudian mintalah mereka untuk membagikan jawaban dan alasan mereka kepada teman sebangkunya.

Eksplorasi—Mengenal Monomial
Alternatif Penyelesaian
Jawaban dan alasan dapat bervariasi. Akan tetapi, dari soal nomor 1 tersebut, diharapkan ada peserta didik yang mengelompokkannya menjadi kategori-kategori seperti yang ditunjukkan di soal nomor 2.

b. Aktivitas 1

Untuk mengawali Aktivitas 1, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik bekerja bersama dengan teman sebangkunya. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk membangun konsep monomial. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan soal nomor 2 dan 3 di aktivitas eksplorasi "Mengenal Monomial".

Eksplorasi—Mengenal Monomial
Alternatif Penyelesaian
Penyelesaian dari soal nomor 2 dan 3 bisa bervariasi karena kedua soal ini mengutamakan penalaran dan pendapat peserta didik. Sebagai contoh, jawaban peserta didik dapat seperti berikut.

2. Pengelompokan tersebut didasarkan pada eksponen variabel-variabelnya. Kelompok pertama, semua eksponennya berupa bilangan cacah, sedangkan kelompok kedua eksponen-eksponennya bukan bilangan cacah.
3. Monomial adalah suatu bilangan, suatu variabel berpangkat bilangan cacah, atau perkalian antara bilangan dan satu atau lebih variabel-variabel berpangkat bilangan cacah.

Mintalah 2–3 kelompok untuk mempresentasikan jawabannya ke kelas. Kelompok-kelompok tersebut sebaiknya secara sengaja dipilih oleh guru agar jawaban dari kelompok-kelompok terpilih tersebut dapat digunakan untuk membangun konsep monomial secara klasikal. Dari presentasi kelompok-kelompok tersebut, pandulah peserta didik untuk menyimpulkan pengertian monomial.

Berdasarkan kesimpulan peserta didik mengenai pengertian monomial, kenalkanlah konsep polinomial kepada peserta didik, yaitu dengan merujuk Definisi 2.1. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk membedakan antara polinomial dan bukan polinomial dengan mencermati Contoh 2.1. Selanjutnya, ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai polinomial dengan mengerjakan Mari, Mencoba dalam **Contoh 2.1** tersebut.

Mari, Mencoba 2.1

Alternatif Penyelesaian

Bentuk $\frac{2x}{y^2} + xy^2$ bukan merupakan polinomial karena suku pertamanya memuat pembagi yang berupa perpangkatan dari variabel. Bentuk kedua dan ketiga, yaitu $4 - x - 2x^4$ dan $3xy^4 + 5x^3y^2 - 7x$, merupakan polinomial karena semua sukunya merupakan monomial.

Setelah peserta didik menyelesaikan pengerjaan bagian Mari, Mencoba, mintalah beberapa peserta didik untuk membagikan jawabannya secara klasikal. Setelah itu, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan penegasan atau meluruskan jawaban yang masih kurang tepat, jika ada.

Untuk melatih peserta didik berpikir kritis, Bapak/Ibu dapat meminta mereka untuk mencermati kolom Mari, Berpikir Kritis. Setelah itu, mintalah satu atau lebih peserta didik untuk menjawab pertanyaan di kolom tersebut secara sukarela. Ajaklah peserta didik lain untuk mendiskusikan jawaban yang disampaikan peserta didik tersebut. Di akhir, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan.

Mari, Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

Benar bahwa $4x^3y - 3x^2$ merupakan pengurangan $4x^3y$ oleh $3x^2$. Akan tetapi, bentuk pengurangan tersebut setara dengan bentuk penjumlahan berikut.

$$4x^3y - 3x^2 = 4x^3y + (-3x^2)$$

Dengan demikian, polinomial tersebut tidak kontradiktif dengan **Definisi 2.1.**

c. Aktivitas 2

Bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang terdiri atas 2–3 peserta didik. Mintalah setiap kelompok tersebut untuk berdiskusi dan mengerjakan semua soal dalam aktivitas eksplorasi. Selama diskusi tersebut, kunjungilah setiap kelompok untuk memastikan agar diskusinya berjalan secara produktif. Ketika ada kelompok yang mengalami kesulitan dalam pengerjaan soal nomor 1, bantulah dengan menggunakan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Berapa eksponen setiap variabel dalam setiap monomial tersebut?
- Apakah ada hubungan antara eksponen variabel tersebut dan derajat monomialnya?

Pertanyaan-pertanyaan bantuan untuk pengerjaan soal nomor 2 serupa dengan pertanyaan-pertanyaan untuk soal nomor 1.

Eksplorasi Mengetahui Derajat Suatu Polinomial

Alternatif Penyelesaian

1. Derajat monomial ditentukan dengan cara menjumlahkan eksponen semua variabelnya.
2. Derajat polinomial sama dengan derajat tertinggi dari monomial penyusunnya.

Bapak/Ibu Guru perlu meminta beberapa kelompok untuk mengomunikasikan jawabannya. Mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan konsep derajat monomial dan polinomial dengan tepat. Gunakan **Definisi 2.2** dan **2.3** untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Setelah peserta didik memahami definisi derajat dari suatu monomial dan polinomial, mintalah peserta didik secara individu untuk mencermati **Contoh 2.2**. Setelah itu, tugaskan mereka untuk mengerjakan Mari, Mencoba dalam contoh tersebut.

Mari, Mencoba 2.2

Alternatif Penyelesaian

Suku-suku dari polinomial $13{,}13x^2y^3z^4 - 8{,}98xy^4z^5 + 10{,}18$ secara berturut-turut derajatnya adalah 9, 10, dan 0. Dengan demikian, polinomial tersebut berderajat 10.

Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat langsung meminta peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari, Mengomunikasikan.

Mari, Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

Pendapat Rahma kurang tepat. Bilangan 0 tidak memiliki derajat. Hal ini dikarenakan bilangan tersebut dapat dituliskan kembali menjadi $0x^0$, $0x$, $0x^2$, dan seterusnya.

Ketika peserta didik mengerjakan bagian Mari, Mencoba 2.2 dan Mari, Mengomunikasikan, Bapak/Ibu Guru sebaiknya memantau pekerjaan peserta didik. Setelah peserta didik selesai, mintalah beberapa dari mereka untuk mempresentasikan hasilnya. Ajaklah juga peserta didik-peserta didik lainnya untuk menanggapi hasil peserta didik tersebut. Di akhir, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan terhadap diskusi tersebut, khususnya terkait dengan bilangan 0 yang

tidak memiliki derajat. Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat meminta peserta didik memperdalam pemahamannya mengenai derajat polinomial dengan mengerjakan kolom Mari, Berpikir Kreatif.

Mari, Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan derajat dari $(6x^5 - 5)^2 (2x^2 - 7)^3$, kita cukup menentukan suku utamanya. Suku utama tersebut adalah sebagai berikut.

$$(6x^5)^2(2x^2)^3 = (36x^{10})(8x^6) = 288x^{16}$$

Dengan demikian, derajatnya adalah 16. Bagian (a) dan (b) dapat dikerjakan dengan cara yang serupa dan memperoleh hasil sebagai berikut.

a. Derajatnya 80

b. Derajatnya 18

d. Aktivitas 3

Berilah peserta didik penjelasan mengenai sistem pertandingan di dalam sebuah liga yang menggunakan pertandingan kandang dan tandang. Bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang terdiri atas 2–3 peserta didik dan tugaskan setiap kelompok tersebut untuk menyelesaikan aktivitas eksplorasi berikut.

Eksplorasi—Pertandingan dalam Liga

Alternatif Penyelesaian

1. Jika terdapat 4 tim, total banyaknya pertandingan adalah 12. Jika banyaknya tim ada 5, 10, dan 20 tim, total banyaknya pertandingan secara berturut-turut adalah 20, 90, dan 380.
2. Banyaknya total pertandingan dalam sebuah liga jika terdapat x tim adalah $x(x - 1)$.
3. Rumus pada nomor 2 dapat dituliskan menjadi $f(x) = x^2 - x$. Dengan demikian, $a = 1$, $b = -1$, dan $c = 0$.
4. Jawaban dapat bervariasi. Salah satu contohnya, fungsi polinomial adalah fungsi yang hanya dibentuk oleh polinomial.

Undanglah satu atau dua kelompok untuk mempresentasikan jawaban setiap nomor di dalam aktivitas eksplorasi. Mintalah presenter untuk memberikan alasan terhadap jawaban yang mereka sampaikan. Ajaklah peserta didik-peserta didik yang lain untuk menanggapi jawaban dan alasan yang dikemukaan oleh kelompok presenter. Berikut ini beberapa pertanyaan yang bisa dipertimbangkan untuk memantik diskusi dalam kelas.

- Mengapa kalian bisa menghasilkan 380 pertandingan ketika banyaknya tim adalah 20?
- Apakah ada kesamaan pola ketika kalian menghitung banyaknya total pertandingan jika banyaknya tim dalam suatu liga adalah 4, 5, 10, dan 20?
- Mengapa fungsi $f(x) = x^2 - x$ selalu dapat digunakan untuk menentukan banyaknya pertandingan jika suatu liga memuat x tim?

Beri tahu peserta didik bahwa fungsi f yang baru saja mereka temukan merupakan salah satu contoh fungsi polinomial. Kemudian, berilah penjelasan mengenai definisi dan bentuk umum dari fungsi polinomial dalam variabel x, seperti yang dituliskan dalam **Definisi 2.3**. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk membaca **Contoh 2.3** secara cermat dan mengerjakan Mari, Mencoba dalam contoh tersebut.

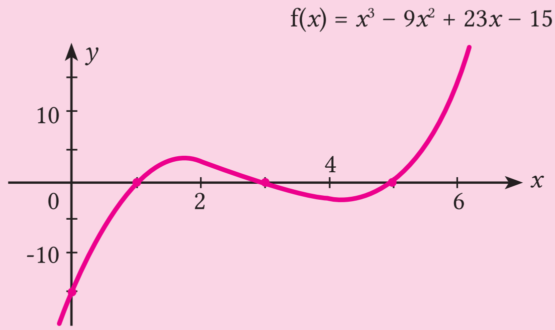
Mari, Mencoba 2.3

Alternatif Penyelesaian

Grafik fungsi f dapat digambar dengan terlebih dahulu membuat tabel beberapa nilai fungsi tersebut.

X	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	−15	0	3	0	−3	0	15
(x, y)	(0, −15)	(1, 0)	(2, 3)	(3, 0)	(4, −3)	(5, 0)	(6, 15)

Kita gambar ketujuh titik tersebut pada bidang koordinat dan menghubungkannya dengan kurva halus untuk memperoleh grafik fungsi f.



Ajaklah peserta didik mengamati beberapa bentuk grafik fungsi polinomial yang ditunjukkan oleh **Gambar 2.4** dalam Buku Siswa. Jelaskan bahwa setiap grafik tersebut merupakan kasus yang memiliki titik potong dengan sumbu *X* maksimal. Untuk memandu peserta didik melakukan pengamatan, ajukan beberapa pertanyaan berikut.

- Apa kesamaan dari semua grafik fungsi-fungsi polinomial tersebut? Apa perbedaannya?
- Apakah ada kesamaan untuk grafik fungsi-fungsi polinomial berderajat ganjil? Bagaimana dengan yang berderajat genap?
- Apakah ada hubungan antara derajat fungsi polinomial dengan banyak maksimum perpotongan grafiknya dengan sumbu *X*?

Setelah peserta didik mengamati beberapa contoh grafik fungsi polinomial, jelaskan kemungkinan-kemungkinan perilaku ujung dari grafik fungsi-fungsi polinomial. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati **Contoh 2.4** dan mengerjakan Mari, Mencoba di contoh tersebut. Setelah menyelesaikannya, mintalah salah satu peserta didik untuk mengomunikasikan jawabannya secara klasikal, kemudian ajaklah peserta didik-peserta didik lainnya untuk mengomentarinya. Di akhir, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan.

Mari, Mencoba 2.4

Alternatif Penyelesaian

Derajat dari $f(x)$ adalah ganjil dan koefisien utamanya negatif. Dengan demikian, perilaku ujung grafiknya mengarah ke kiri atas dan kanan bawah (↖, ↘).

e. Pendinginan

Kegiatan pembelajaran yang dilakukan dalam subbab Polinomial dan Fungsi Polinomial ini adalah untuk memahami polinomial dan fungsi polinomial serta karakteristiknya. Untuk itu, ajaklah peserta didik menuliskan apa saja yang telah dipelajarinya. Misalnya, mintalah peserta didik untuk melanjutkan kalimat "Menurut saya, polinomial adalah .... Untuk menentukan derajat suatu polinomial, yang perlu saya lakukan adalah .... Bentuk umum fungsi polinomial adalah .... Perilaku ujung grafik fungsi polinomial dipengaruhi oleh ...".

Selanjutnya, sebagai evaluasi formatif, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan soal nomor 7 dalam Latihan A selama 5 menit.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Polinomial dan Fungsi Polinomial, mintalah peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa pada nomor 1–3.

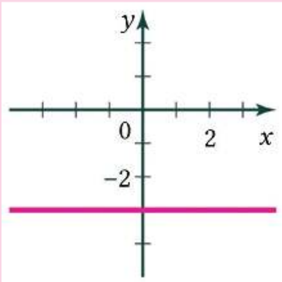
3. Kegiatan Tindak Lanjut

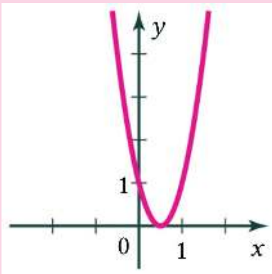
a. Latihan

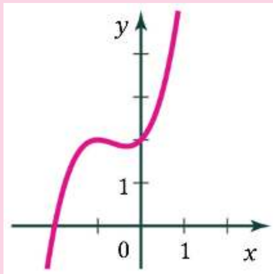
Alternatif Penyelesaian

Pemahaman Konsep

1. Benar. Bentuk aljabar yang diberikan merupakan penjumlahan dari 3 monomial.
2. Salah. Karena $f(-2) = -10$, maka grafik f tidak melalui titik $(-2, 18)$, tetapi melalui titik $(-2, -10)$.
3. Mengarah ke kiri atas dan kanan bawah (↖, ↘)
4. (a) polinomial; (b) polinomial; (c) bukan polinomial
5. (a) 2; (b) 5; (c) 6
6. Grafik fungsi f, g, dan h ditunjukkan sebagai berikut.

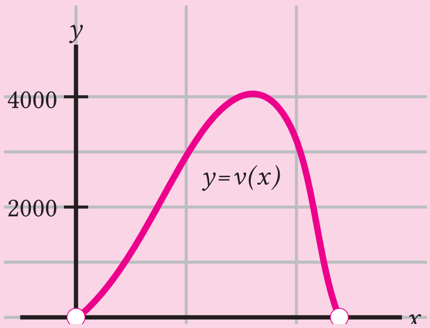






7. Grafik C karena fungsi P berderajat genap dan memiliki koefisien utama negatif sehingga perilaku ujunga grafiknya mengarah ke kiri bawah dan kanan bawah (↙, ↘).
8. Tampilan kalkulator grafik yang digunakan Galang kurang besar. Agar tampilannya sesuai dengan perilaku ujung-ujungnya, Galang sebaiknya memperbesar tampilan di sumbu X, misalnya dimulai dari $x = -5$ sampai $x = 10$.
9. (a) $V(x) = 48x^2 - 2x^3$

   (b) Grafiknya belum tepat karena daerah asal fungsi V adalah $\{x \mid 0 < x < 24, x \in \mathbb{R}\}$. Dengan demikian, grafiknya seharusnya seperti berikut.



   (b) Volume maksimumnya sekitar 4.000 cm^3 lebih sedikit. (Secara eksak, volume maksimumnya adalah 4.096 cm^3 ketika $x = 16$ cm.)

b. Penugasan

Berikan tugas kepada peserta didik untuk mengerjakan soal-soal Latihan A pada nomor 8 dan 9. Soal-soal tersebut memfasilitasi peserta didik untuk berpikir kritis dan mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilannya dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari.

B. Panduan Pembelajaran: Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

1. Persiapan Pembelajaran

Di dalam subbab ini, peserta didik akan menemukan strategi untuk melakukan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial dengan menggunakan pengetahuan awalnya mengenai operasi-operasi bilangan. Untuk mencapai tujuan tersebut, peserta didik akan diajak untuk melakukan diskusi kelompok sebanyak dua kali. Pertama, peserta didik bersama kelompok pertamanya akan mempelajari dan mendiskusikan topik yang sama. Kedua, peserta didik akan beralih ke kelompok kedua untuk membagikan hasil diskusi yang diperoleh di kelompok pertama.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial, peserta didik diharapkan akan memiliki kemampuan berikut.

- Menggunakan konsep penjumlahan dan pengurangan pada bilangan untuk menemukan dan melakukan kedua operasi tersebut pada polinomial.
- Melakukan perkalian pada polinomial dengan menggunakan model luas, tabel, dan sifat distributif.

b. Alat dan Bahan

Kalkulator grafik Desmos (tidak wajib)

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial, Bapak/Ibu Guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara Bapak/Ibu menghubungkan pengetahuan awal peserta didik mengenai operasi-operasi bilangan dengan operasi-operasi polinomial?
- Apa saja yang perlu dipertimbangkan untuk membuat kelompok agar terjadi diskusi yang produktif di dalam kelompok tersebut?
- Kesalahan dan miskonsepsi apa yang kemungkinan akan dilakukan oleh peserta didik ketika melakukan penjumlahan, pengurangan, atau perkalian polinomial?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/Ibu Guru dapat memulai kegiatan pemanasan dengan membangkitkan rasa ingin tahu peserta didik dengan menjelaskan bahwa polinomial yang telah dipelajari peserta didik sejauh ini memiliki kesamaan dengan bilangan. Untuk menjawab rasa ingin tahu peserta didik, mintalah mereka secara mandiri untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi "Membandingkan Polinomial dan Bilangan" serta mendiskusikannya secara klasikal.

Eksplorasi Membandingkan Polinomial dan Bilangan

Alternatif Penyelesaian

Tabel yang diberikan dapat dilengkapi sebagai berikut.

53	50 + 3	$5x + 3$
375	300 + 70 + 5	$3x^2 + 7x + 5$
2.298	2.000 + 200 + 90 + 8	$2x^3 + 2x^2 + 9x + 8$
6.311	6.000 + 300 + 10 + 1	$6x^3 + 3x^2 + x + 1$
17.742	10.000 + 7.000 + 700 + 40 + 2	$x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 2$

Bilangan pada setiap baris dalam tabel tersebut serupa dengan polinomial di kanannya karena bilangan tersebut dapat diperoleh dengan mengganti x dalam polinomial tersebut dengan 10. Misalnya, 375 sama dengan $3(10^2) + 7(10) + 5$, yaitu dengan mensubstitusi $x = 10$ dalam $3x^2 + 7x + 5$. Akan tetapi, bilangan dan polinomial tersebut berbeda karena nilai x dalam polinomial tersebut dapat bilangan apa saja, tidak hanya 10.

b. Aktivitas

Untuk mengawali aktivitas pembelajaran ini, Bapak/Ibu Guru dapat membagi semua peserta didik menjadi tiga kelompok. Setiap kelompok ini nanti akan ditugaskan untuk mengerjakan satu aktivitas eksplorasi. Jika setiap kelompok tersebut ukurannya terlalu besar, bagilah setiap kelompok tersebut menjadi dua atau lebih. Setelah pembagian kelompok selesai, mintalah setiap kelompok untuk mengerjakan aktivitas pembelajaran berikut.

Aktivitas Kelompok 1 dan 2

Aktivitas pertama yang perlu dikerjakan oleh kelompok 1 dan 2 adalah aktivitas Eksplorasi "Melakukan Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial". Untuk kelompok 1, mintalah mereka untuk mengerjakan soal-soal yang terkait dengan penjumlahan bilangan dan polinomial, sedangkan kelompok 2 yang terkait dengan pengurangan bilangan dan polinomial.

Eksplorasi—Melakukan Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Alternatif Penyelesaian

1. Penjumlahan bersusun dilakukan dengan menjumlahkan bilangan-bilangan yang memiliki nilai tempat yang sama. Jika hasil penjumlahannya 10 atau lebih, nilai puluhannya "diberikan" kepada bilangan tepat di sebelah kirinya (yang memiliki nilai tempat lebih tinggi). Pengurangan bersusun dilakukan dengan cara yang serupa dengan penjumlahan. Jika bilangan yang dikurangi kurang dari pengurangnya, maka perlu "meminjam" dari bilangan di kirinya.
2. Hasil penjumlahan dua polinomial yang diberikan ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \\ \underline{6x^3 + 2x^2 + 4x + 1} \; + \\ 8x^3 + 9x^2 + 7x + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9x^3 + 4x^2 + 6x + 5 \\ \underline{2x^3 + 3x^2 + 3x + 4} \; - \\ 7x^3 + x^2 \quad + 3x + 1 \end{array}$$

   Kedua polinomial tersebut dijumlahkan dan dikurangkan dengan menggunakan sifat distributif pada suku-suku yang memiliki variabel dan eksponen dari variabel yang sama.
3. Cara yang dilakukan pada dasarnya memang sama. Dia melakukan penjumlahan atau pengurangan untuk suku-suku yang memiliki variabel dan eksponen dari variabel yang sama.

Setelah aktivitas eksplorasi tersebut selesai dikerjakan, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mencermati **Contoh 2.5** dan mengerjakan Mari, Mencoba di dalam contoh tersebut.

Mari, Mencoba 2.5

Alternatif Penyelesaian

Kedua polinomial tersebut dapat dijumlahkan dengan menjumlahkan suku-sukunya yang sejenis.

$(2a^2b - 3ab^2 + 5) + (3a^2b + ab^2) = (2 + 3)a^2b + (-3 + 1)ab^2 + 5 = 5a^2b - 2ab^2 + 5$

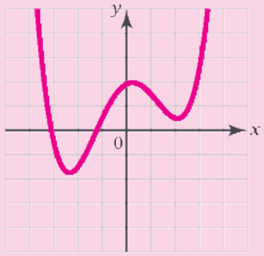
Jika kondisinya memungkinkan (terkait waktu misalnya), Bapak/Ibu Guru dapat meminta kelompok pertama untuk mengerjakan masalah dalam kolom Mari, Berpikir Kreatif.

Mari Berpikir Kreatif

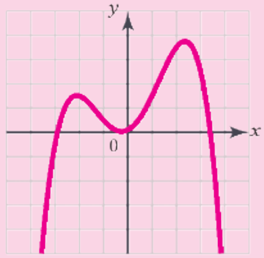
Alternatif Penyelesaian

(a) Jika diketahui grafiknya, penjumlahan dua polinomial dapat dilakukan dengan menjumlahkan ketinggiannya di setiap x. Untuk pengurangan, ketinggiannya dikurangi. Dengan demikian, grafik $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$ ditunjukkan seperti berikut.

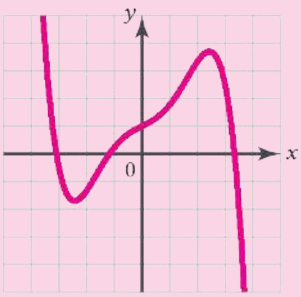
$y = f(x) + g(x)$



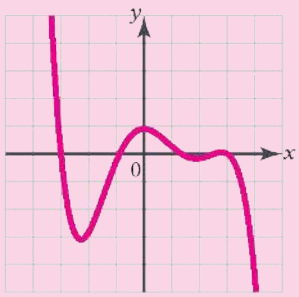
$y = f(x) - g(x)$



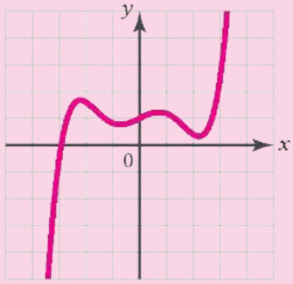
(b) Dengan cara yang serupa dengan bagian (a), grafik $f(x) + h(x)$ dan $g(x) + h(x)$, $f(x) - h(x)$, dan $g(x) - h(x)$ ditunjukkan sebagai berikut.



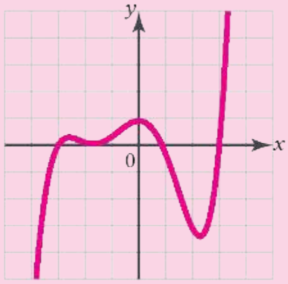
$y = f(x) + h(x)$



$y = g(x) + h(x)$



$y = f(x) - h(x)$



$y = g(x) - h(x)$

Aktivitas Kelompok 3

Aktivitas pertama yang perlu dikerjakan oleh kelompok 3 adalah aktivitas eksplorasi "Mengalikan Dua Polinomial".

Eksplorasi Mengalikan Dua Polinomial

Alternatif Penyelesaian

1. (a) Tabel yang diberikan merupakan bentuk penyederhanaan dari model luas. Karena setiap sel dalam tabel tersebut diperoleh dengan mengalikan kepala kolom dan barisnya, sel tersebut merepresentasikan luas daerah. Hal ini sama dengan model luas daerah.

   (b) Perkalian bersusun 16 × 12 ditunjukkan sebagai berikut, cara yang sebelah kiri merupakan versi ringkas, sedangkan cara yang kanan merupakan versi panjang.

$$\begin{array}{rl} 16 & \\ 13 & \times \\ \hline 32 & \\ 16 & + \\ \hline 192 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 16 & \\ 13 & \times \\ \hline 12 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 100 & + \\ \hline 192 & \end{array}$$

   Dari cara bersusun tersebut, hasil kali 16 dan 12 diperoleh dengan menjumlahkan 32 dan 160 di cara sebelah kiri, atau menjumlahkan 12, 20, 60, dan 100 di cara sebelah kanan. Hal ini serupa dengan cara tabel pada bagian (a).

2. Hasil kali $(x + 6)(x + 2)$ dengan menggunakan tabel dapat ditunjukkan sebagai berikut.

	x	6
x	x^2	$6x$
2	$2x$	12

Dengan demikian, $(x + 6)(x + 2) = x^2 + 2x + 6x + 12 = x^2 + 8x + 12$.

3. Perkalian $(x - 5)(x^2 + 3x - 1)$ dapat ditentukan dengan menggunakan tabel berikut.

	x	-5
x^2	x^3	$-5x^2$
$3x$	$3x^2$	$-15x^2$
-1	$-x$	5

Dengan demikian,

$(x - 5)(x^2 + 3x - 1) = x^3 + 3x^2 - 5x^2 - x - 15x + 5 = x^3 - 2x^2 - 16x + 5.$

4. Kedua strategi tersebut sama-sama dimulai dengan mengalikan setiap suku polinomial pertama dan kedua, kemudian menjumlahkannya.
5. Iya bisa. Sifat yang digunakan adalah sifat distributif.

Aktivitas kedua kelompok ketiga adalah mencermati **Contoh 2.6** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut.

Mari, Mencoba 2.6

Alternatif Penyelesaian

Hasil perkaliannya adalah $(4x^2 - x + 3)(x^2 - 1) = 4x^4 - x^3 - x^2 + x - 3$.

Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari, Berpikir Kreatif. Kolom ini mengajak peserta didik untuk menemukan strategi perkalian polinomial selain yang telah dipelajarinya sebelumnya.

Mari Berpikir Kreatif

Alternatif Penyelesaian

Ketika melakukan perkalian bersusun, suku-suku dalam polinomial tersebut perlu diurutkan dari yang berderajat tertinggi ke terendah. Berikut ini adalah perkalian bersusun untuk perkalian di Contoh 2.6.

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 2x + 7 \\
2x - 5 \\
\hline
-5x + 10x - 35 \\
2x^3 - 4x^2 + 14x \qquad \\
\hline
2x^3 - 9x^2 + 24x - 35
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\times \\
\\
\\
+ \\
\end{array}
$$

Setelah setiap kelompok menyelesaikan aktivitas pembelajarannya, Bapak/Ibu Guru perlu membuat kelompok ulang sehingga setiap kelompok terdiri atas tiga peserta didik yang berasal dari kelompok asal yang berbeda, yaitu yang membahas penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial. Setelah kelompok-kelompok baru terbentuk, mintalah setiap peserta didik membagikan apa yang telah mereka peroleh dari diskusi di kelompok asal. Dengan demikian, di setiap kelompok terdapat peserta didik yang membagikan pembelajarannya tentang penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial.

d. Pendinginan

Di aktivitas pendinginan, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengulas kembali pembelajaran yang telah mereka lakukan. Tanyalah beberapa peserta didik yang kelompok asalnya bukan di kelompok 1 tentang strategi penjumlahan polinomial. Ajukan pertanyaan juga bagi peserta didik-peserta didik yang kelompok asalnya bukan di kelompok 2 dan 3 tentang pengurangan dan perkalian pecahan. Selain untuk mengulas pembelajaran, hal ini dapat digunakan untuk memeriksa jalannya diskusi kelompok yang telah dilakukan.

Sebelum mengakhiri pembelajaran, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal Latihan B nomor 8(a). Beri waktu 5 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa pada nomor 4–5 untuk memfasilitasi mereka melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

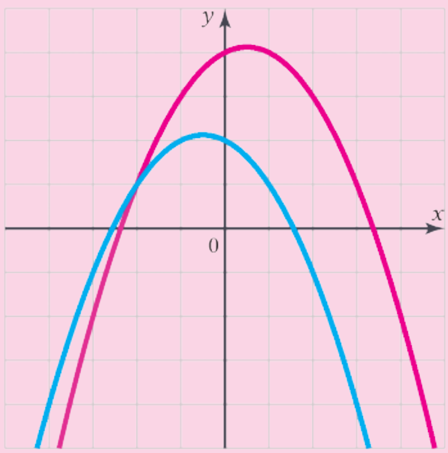
a. Latihan

Latihan A-Buku Siswa

Alternatif Penyelesaian

1. Distributif
2. Salah karena jika kita pilih polinomial pertamanya $2x - 3$ dan polinomial keduanya $x + 5$, $(2x - 3) - (x + 5) \neq -[(2x - 3) + (x + 5)]$.
3. Salah karena seharusnya $(5x - 1) - (3x - 4) = 5x - 1 - 3x + 4$.
4. (a) $3m^2n + 2m^2n - mn^2 + mn - 12 + 7 = 5m^2n - mn^2 + mn - 5$

   (b) $2x^4 - x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 + 4x - 12 + 6 = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6$
5. Berdasarkan grafik fungsi f dan g yang diketahui, grafik fungsi $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$ ditunjukkan sebagai berikut.



6. $(3a - b + 2)(a + 2b - 5) = 3a^2 + 5ab - 13a - 2b^2 + 9b - 10$
7. Tidak karena jika tanda kotak tersebut diganti dengan -1, maka $A(x) = x^2 - x^{-1} - 2$ yang bukan merupakan polinomial.
8. (a) Luas daerah yang diarsir dapat ditentukan dengan mengurangi luas persegi panjang besar dengan luas segitiga yang tidak diarsir.

   $L = [3x(x + 3)] - \frac{1}{2}[2x(x + 3)] = 2x^2 + 6x$

   Selain itu, luas juga dapat ditentukan dengan menggunakan rumus luas trapesium.

   $L = \frac{1}{2}(x + 3)\ (3x^2 + x) = 2x^2 + 6x$

(b) Luas daerah yang diarsir dapat ditentukan dengan mengurangi luas daerah persegi besar dengan luas daerah persegi kecil.

$L = (5x - 1)^2 - x^2 = 24x^2 - 10x + 1$

9. Misalkan, panjang pagar yang mengarah ke arah timur-barat adalah x dan panjang pagar yang mengarah ke arah utara-selatan adalah y. Karena biaya pemagaran ke arah timur-barat adalah sebesar Rp1.500,00 per meternya, sedangkan yang ke arah utara-selatan adalah Rp1.000,00, serta anggaran yang tersedia adalah Rp500.000,00, hubungan ini dapat dimodelkan sebagai berikut.

$1.500x + 1.000y = 500.000$

Dengan menyelesaikan y dalam persamaan tersebut, kita peroleh hasil seperti berikut.

$$y = \frac{1}{2}(1000 - 3x)$$

Dengan demikian, fungsi luasnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$y = xy = x[\frac{1}{2}(1000 - 3x)] = 500x - \frac{3}{2}x^2$$

b. Penugasan

Sebagai penugasan, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik mengerjakan Latihan B untuk nomor 5, 7, dan 9. Dari soal-soal tersebut, peserta didik diharapkan dapat mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilannya tentang penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial untuk menyelesaikan permasalahan dengan konteks yang berbeda.

C. Panduan Pembelajaran Pembagian Polinomial

1. Persiapan Pembelajaran

Pembelajaran pada subbab ini melanjutkan pembelajaran yang telah dilakukan di subbab sebelumnya. Jika di subbab sebelumnya peserta didik belajar tentang penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial, di subbab ini, peserta didik akan mempelajari pembagian polinomial. Pembelajaran di subbab ini terbagi menjadi tiga aktivitas pembelajaran. Di aktivitas pertama, peserta didik mempelajari pembagian polinomial dengan cara bersusun. Di aktivitas kedua, peserta didik dikenalkan dengan metode yang lebih ringkas daripada pembagian bersusun, yaitu

metode Horner. Di aktivitas terakhir, peserta didik menggunakan pengetahuan dan keterampilannya mengenai pembagian polinomial dan Teorema Sisa untuk menentukan nilai polinomial.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Pembagian Polinomial, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

a. Melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun dan menuliskan hasilnya ke dalam bentuk algoritma pembagian.
b. Menggunakan metode Horner untuk melakukan pembagian polinomial dan menuliskan hasilnya ke dalam bentuk algoritma pembagian.
c. Menggunakan Teorema Sisa untuk menentukan nilai suatu polinomial jika diketahui nilai variabelnya.

b. Alat dan Bahan

Tidak ada alat dan bahan khusus yang digunakan dalam pembelajaran pada subbab Pembagian Polinomial.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Pembagian Polinomial, Bapak/ Ibu Guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana pengetahuan dan keterampilan awal peserta didik mengenai pembagian bilangan dapat digunakan sebagai pintu masuk pembelajaran pembagian polinomial?
- Bagaimana menggunakan permasalahan sehari-hari, misalnya kunjungan ke Candi Borobudur, untuk memotivasi peserta didik mempelajari pembagian polinomial?
- Kesalahan atau miskonsepsi apa yang kemungkinan akan dilakukan peserta didik ketika mempelajari pembagian polinomial?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/Ibu dapat memulai aktivitas pemanasan dengan mengingatkan peserta didik bahwa pada kegiatan-kegiatan pembelajaran sebelumnya, yaitu pada subbab Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial, mereka telah mengetahui bahwa terdapat banyak kesamaan antara bilangan dan polinomial. Kesamaan tersebut juga dijumpai di dalam operasi pembagian. Berawal dari itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi "Membagi Bilangan" secara mandiri. Setelah menyelesaikannya, Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa peserta didik untuk menunjukkan jawabannya beserta dengan alasannya.

Eksplorasi Membagi Bilangan

Alternatif Penyelesaian

Pada tabel yang diberikan, kolom pertama memuat pecahan biasa, sedangkan kolom kedua dan ketiga secara berturut-turut berisi pecahan campuran dan bentuk perkalian dan penjumlahan yang bersesuaian. Dengan demikian, berikut ini adalah tabel setelah dilengkapi bagian-bagian kosongnya.

$\frac{7}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$\frac{13}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$13 = 5 \cdot 2 + 3$
$\frac{23}{6}$	$3\frac{5}{6}$	$23 = 6 \cdot 3 + 5$
$\frac{35}{8}$	$4\frac{3}{8}$	$35 = 8 \cdot 4 + 3$
$\frac{57}{10}$	$5\frac{7}{10}$	$57 = 10 \cdot 5 + 7$

Di akhir aktivitas pemanasan, Bapak/Ibu Guru dapat memandu peserta didik untuk menemukan koneksi antara isian di dalam kolom pertama, kedua, dan ketiga dalam tabel yang diberikan. Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan bahwa bentuk pembagian bilangan p/q dapat diubah ke dalam pecahan campuran $h\ s/q$ sedemikian rupa sehingga $p = q \cdot h + s$. Bilangan h dan s tersebut secara berturut-turut disebut hasil bagi dan sisa pembagian. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru perlu menjelaskan bahwa hal seperti itu juga berlaku pada polinomial dan disebut dengan

algoritma pembagian polinomial. Kemudian, ajaklah peserta didik untuk membaca Sifat 2.2 secara cermat. Di akhir, undanglah peserta didik untuk menjawab soal dalam kolom Mari, Berpikir Kritis. Jika perlu, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan nilai tambahan kepada peserta didik yang menjawab soal dalam kolom tersebut.

Mari, Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

Pembuktian persamaan tersebut dapat dilakukan dari ruas kanan, yaitu dengan menjabarkan bentuk di ruas kanan dan menunjukkan bahwa hasilnya sama dengan bentuk di ruas kiri.

$$\begin{aligned}(x + 3)(x^2 + x + 2) + 2 &= (x^3 + 4x^2 + 5x + 6) + 2 && \text{kalikan}\\ &= x^3 + 4x^2 + 5x + 8 && \text{sederhanakan}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$.

b. Aktivitas 1

Bapak/Ibu Guru dapat membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok yang terdiri atas 3–4 peserta didik. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi menyelesaikan aktivitas eksplorasi “Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun”.

Eksplorasi Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun

Alternatif Penyelesaian

1. Pembagian 297 oleh 14 dapat dilakukan dengan cara bersusun seperti berikut.

$$\begin{array}{r@{\,}l} & 21 \\ 14 & \overline{)297} \\ & \underline{28}\ - \\ & 17 \\ & \underline{14}\ - \\ & 3 \end{array}$$

Dengan demikian, hasil bagi 297 oleh 14 adalah 21 dan bersisa 3. Dengan kata lain, $297 = 14 \cdot 21 + 3$.

2. Pembagian polinomial yang diberikan dapat dilanjutkan seperti berikut.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 2 \\
\hline
x + 3 & x^3 + 4x^2 + 5x + 8 \\
 & \underline{x^3 + 3x^2} \quad - \\
 & \quad x^2 + 5x \\
 & \quad \underline{x^2 + 3x} \quad - \\
 & \qquad 2x + 8 \\
 & \qquad \underline{2x + 6} \quad - \\
 & \qquad\quad 2
\end{array}
$$

Dengan demikian, jika $x^3 + 4x^2 + 5x + 8$ dibagi dengan $x + 3$, hasil baginya adalah $x^2 + x + 2$ dan sisanya 2.

Setelah peserta didik menyelesaikan aktivitas eksplorasi, Bapak/Ibu dapat menunjuk dua atau lebih kelompok untuk mempresentasikan hasilnya. Setelah presentasi, mintalah peserta-peserta didik lainnya untuk menanggapinya. Setelah itu, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan dengan menjelaskan bagaimana strategi pembagian polinomial dengan cara bersusun.

Bapak/Ibu Guru perlu melanjutkan kegiatan pembelajaran dengan meminta peserta didik untuk mencermati **Contoh 2.7** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba di dalam contoh tersebut. Setelah selesai, mintalah peserta didik untuk mengajukan diri mempresentasikan hasil pekerjaannya untuk didiskusikan.

Mari, Mencoba 2.7

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita bagi $P(x) = x^3 - x + 9$ dengan $Q(x) = x^2 - 2x + 3$. Pembagian tersebut dapat dilakukan dengan cara bersusun.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
\hline
x^2 - 2x + 3 & x^3 + 0x^2 - x + 9 \\
 & \underline{x^3 + 2x^2 - 3x} \quad - \\
 & \quad 2x^2 - 4x + 9 \\
 & \quad \underline{2x^2 - 4x + 6} \quad - \\
 & \qquad\qquad 3
\end{array}
$$

Pembagian tersebut dapat dituliskan kembali menjadi bentuk berikut.

$x^3 - x + 9 = (x^2 - 2x + 3)(x + 2) + 3$

Di akhir Aktivitas 1, Bapak/Ibu dapat menugaskan peserta didik untuk mengerjakan soal-soal dalam kolom **Mari, Berpikir Kreatif**.

Mari Berpikir Kreatif

Alternatif Penyelesaian

(a) Hasil bagi dan sisa pembagian $(x^3 - 1) \div (x - 1)$ secara berturut-turut adalah $x^2 + x + 1$ dan 0. Hasil bagi dan sisa pembagian $(x^4 - 1) \div (x - 1)$ secara berturut-turut adalah $x^3 + x^2 + x + 1$ dan 0.

(b) Berdasarkan pola di bagian (a), hasil bagi dan sisa pembagian $(x^8 - 1) \div (x - 1)$ adalah $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dan 0.

(c) Berdasarkan hasil di bagian (a) dan (b), dapat diduga bahwa untuk n bilangan cacah, hasil bagi dan sisa dari pembagian $(x^n - 1) \div (x - 1)$ secara berturut-turut adalah $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$ dan 0. Dengan kata lain, kita dapat menuliskannya dalam bentuk algoritma pembagian berikut.

$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$

Untuk membuktikannya, kita akan tunjukkan bahwa bentuk perkalian di ruas kanan hasilnya sama dengan bentuk di ruas kiri.

$$\begin{array}{rl}
x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1 & \\
x - 1 & \\
\hline
- x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x^2 - x - 1 & \times \\
x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x \quad & \\
\hline
x^n + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 - 1 & \times
\end{array}$$

Jadi, terbukti bahwa $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$.

c. Aktivitas 2

Bapak/Ibu Guru dapat memulai Aktivitas 2 dengan menjelaskan ke peserta didik bahwa mereka akan bekerja berpasangan dengan teman sebangkunya. Jika ada peserta didik yang tidak memiliki pasangan atau teman sebangku, mintalah peserta didik tersebut untuk bergabung ke kelompok lain. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi “Membagi Polinomial dengan Metode Horner”.

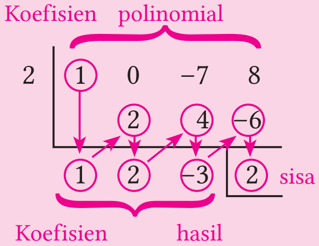
Eksplorasi—Membagi Polinomial dengan Metode Horner

Alternatif Penyelesaian

1. Kesamaannya terletak pada bilangan-bilangan yang ditandai dengan warna yang sama.

2. Perbedaannya, penulisan metode Horner lebih ringkas daripada cara bersusun. Dalam cara bersusun, polinomial yang dibagi dan hasil baginya ditulis lengkap, sedangkan dalam metode Horner ditulis koefisiennya saja. Di dalam cara bersusun, pembaginya juga ditulis lengkap $x - 2$, tetapi di metode Horner hanya ditulis 2. Terakhir, operasi yang digunakan di baris-baris pembagian bersusun adalah pengurangan, sedangkan metode Horner menggunakan penjumlahan.

3. Langkah-langkah melakukan metode Horner dirangkum sebagai berikut.



Dari gambar tersebut, tanda panah vertikal merepresentasikan penjumlahan, sedangkan tanda panah diagonal merepresentasikan perkalian dengan 2.

Setelah peserta didik menyelesaikan pengerjaan di aktivitas eksplorasi, tunjuklah beberapa kelompok untuk mengomunikasikan jawabannya. Setelah itu, mintalah peserta didik-peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban tersebut. Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan, khususnya mengenai cara melakukan metode Horner.

Setelah peserta didik memahami metode Horner, selanjutnya Bapak/Ibu Guru perlu meminta peserta didik membaca **Contoh 2.8** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba di contoh tersebut. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengajukan diri menyampaikan jawaban atas soal dalam **Mari, Mencoba** tersebut.

Mari, Mencoba 2.8

Alternatif Penyelesaian

Pertama, dengan menggunakan metode Horner, kita bagi $x^4 + 4$ dengan $x - 1$.

1	1	0	0	0	4
		1	1	1	1
	1	1	1	1	5

Dengan demikian, hasil baginya adalah $x^3 + x^2 + x + 1$ dan sisanya adalah 5.

Ketika mendiskusikan jawaban bagian Mari, Mencoba dalam **Contoh 2.8**, kemungkinan jawaban peserta didik masih kurang tepat. Untuk itu, antisipasilah kesalahan atau miskonsepsi tersebut.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menggunakan metode Horner, kemungkinan ada peserta didik yang tidak menuliskan koefisien polinomial yang dibagi secara lengkap. Misalnya, ketika polinomial yang dibagi adalah $x^4 + 4$, mungkin ada peserta didik yang menuliskan koefisien-koefisiennya menjadi 1 dan 4. Seharusnya, koefisien-koefisien yang ditulis adalah 1, 0, 0, 0, dan 4. Untuk itu, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan pendampingan kepada peserta didik terkait kemungkinan kesalahan ini.

Di akhir Aktivitas 2, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan tugas kolom Mari, Berkolaborasi untuk dikerjakan peserta didik di rumahnya.

Mari Berkolaborasi

Alternatif Penyelesaian

1. Berikut ini alternatif penyelesaian di setiap langkah pada nomor 1.
   (a) Karena $2x - 1 = 2(x - ½)$, maka $a = 2$ dan $c = ½$.
   (b) Pembagian $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ oleh $x - ½$ dengan metode Horner ditunjukkan sebagai berikut.

½	2	−5	4	−3
		1	−2	1
	2	−4	2	−2

   Dengan demikian, $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (x - ½)(2x^2 - 4x + 2) - 2$.

(c) Berdasarkan bagian (b), polinomial $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ dapat dituliskan seperti berikut.

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 &= (x - ½)(2x^2 - 4x + 2) - 2. \\ &= (x - ½)(x^2 - 2x + 2) - 2. \\ &= (2x - 1)(x^2 - 2x + 2) - 2. \end{aligned}$$

Jadi, hasil bagi dan sisa pembagian $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ oleh $2x - 1$ secara berturut-turut adalah $x^2 - 2x + 1$ dan -2.

2. Setiap langkah di nomor 2 memiliki alternatif penyelesaian sebagai berikut.

(a) Pembagian $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dengan $x - 1$ dengan metode Horner ditunjukkan seperti berikut.

1	1	0	−10	−5	10
		1	−2	−9	−14
	1	1	−9	−14	−4

Dengan demikian, $x^4 - 10x^2 - 5x + 10 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 9x - 14) - 4$.

(b) Selanjutnya, kita bagi $x^3 + x^2 - 9x - 14$ dengan $x - 3$.

3	1	1	−9	−14
		3	12	9
	1	4	2	−5

Dengan demikian, $x^3 + x^2 - 9x - 14 = (x - 3)(x^2 + 4x + 3) - 5$.

(c) Berdasarkan bagian (a) dan (b), polinomial $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dapat dituliskan menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 - 5x + 10 &= (x - 1)\ [(x - 3)\ (x^2 + 4x + 3) - 5] - 4 \\ &= (x - 1)\ (x - 3)\ (x^2 + 4x + 3) - 5(x - 1) - 4 \\ &= (x - 1)\ (x - 3)\ (x^2 + 4x + 3) - 5x + 1 \end{aligned}$$

Jadi, hasil bagi dan sisa dari pembagian $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ oleh $(x - 1)(x - 3)$ secara berturut-turut adalah $x^2 + 4x + 3$ dan $-5x + 1$.

d. Aktivitas 3

Bapak/Ibu Guru dapat memulai aktivitas pembelajaran dengan memberikan motivasi tentang pentingnya keterampilan untuk menentukan nilai polinomial. Untuk melakukannya, ceritakan kolom Matematika dalam Budaya yang berjudul “Berkunjung ke Candi Borobudur”. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk

mengerjakan aktivitas eksplorasi "Membagi Polinomial dan Menentukan Nilai Fungsi Polinomial".

Eksplorasi—Membagi Polinomial dan Menentukan Nilai Fungsi Polinomial

Alternatif Penyelesaian

1. Berikut ini adalah tabel yang sudah dilengkapi.

$P(x)$	Pembagi	Sisa	$P(c)$
$P(x) = x^2 + 4x - 16$	$x - 3$	5	P(3) = 5
$P(x) = x^2 - 2x - 14$	$x - 1$	−15	P(1) = −15
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 11$	$x + 2$	7	P(−2) = 7
$P(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$	$x + 7$	0	P(−7) = 0
$P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 10$	x	−10	P(0) = −10

2. Pada baris yang sama, nilai pada kolom ketiga dalam tabel tersebut selalu sama dengan kolom keempat. Berdasarkan pengamatan ini, diduga bahwa jika sisa pembagian suatu polinomial $P(x)$ oleh $x - c$ sama dengan nilai polinomial tersebut ketika $x = c$.
3. Setuju, karena dugaannya sama dengan dugaan pada nomor 2. Misalkan $P(x)$ dibagi dengan $x - c$ memiliki hasil bagi $H(x)$ dan sisa S. Hal tersebut dapat dituliskan dalam bentuk algoritma pembagian berikut.
$$P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S$$
Dengan demikian, nilai $P(c)$ dapat ditentukan seperti berikut.
$$P(c) = (x - c) \cdot H(c) + S = 0 \cdot H(c) + S = 0 + S = S$$
Terbukti bahwa sisa pembagiannya sama dengan nilai $P(c)$.

Setelah peserta didik menyelesaikan aktivitas eksplorasi, Bapak/Ibu Guru dapat menegaskan hasil yang diperoleh peserta didik dengan menjelaskan Teorema Sisa dalam Sifat 2.3. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati **Contoh 2.9** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut.

Mari, Mencoba 2.9

Alternatif Penyelesaian

Berikut ini adalah metode Horner yang digunakan untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian $P(x) = 3x^5 - 20x^4 - 6x^3 - 48x - 8$ oleh $x - 7$.

7	3	−20	−6	0	−48	−8
		21	7	7	49	7
	3	1	1	7	1	−1

Hasil bagi dan sisanya secara berturut-turut adalah $3x^4 + x^3 + x^2 + 7x + 1$ dan -1. Dengan menggunakan Teorema Sisa, kita peroleh $P(7) = -1$.

Setelah peserta didik menyelesaikan Mari, Mencoba dalam Contoh 2.10, bapak/ibu dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari, Mengomunikasikan. Setelah itu, undanglah peserta didik untuk mengajukan diri menjawab soal dalam kolom tersebut. Bapak/ibu dapat memberikan nilai tambahan bagi peserta didik yang menjawab soal tersebut.

Mari, Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

Misalkan, jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $ax - b$, hasil baginya $H(x)$ dan sisanya S. Hal ini dapat dinyatakan ke dalam bentuk algoritma pembagian berikut.

$$P(x) = (ax - b) \cdot H(x) + S$$

Oleh karena itu, nilai dapat ditentukan sebagai berikut.

$$P\left(\frac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{b}{a} - b\right) \cdot H\left(\frac{b}{a}\right) + S = (b - b) \cdot H\left(\frac{b}{a}\right) + S = 0 + S = S$$

Jadi, terbukti bahwa dugaannya Ahmad benar, yaitu jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $ax - b$, maka sisanya adalah $P\left(\frac{b}{a}\right)$

e. Pendinginan

Dalam kegiatan pendinginan, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik secara bersama-sama untuk mengulas kembali pembelajaran dalam Subbab C Pembagian Polinomial. Berikut ini beberapa pertanyaan panduan untuk membantu peserta didik mengulas pembelajaran.

- Secara umum, bagaimana cara kalian melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun?

- Bagaimana cara melakukan pembagian polinomial dengan metode Horner? Sebutkan kesamaan dan perbedaan metode ini dengan pembagian bersusun.
- Bagaimana isi Teorema Sisa? Apa kegunaan dari teorema ini?

Selain itu, Bapak/Ibu Guru perlu menghubungkan pembelajaran yang telah dilakukan di dalam subbab ini dengan pembelajaran di subbab selanjutnya.

Di akhir pembelajaran, berilah waktu selama 5 menit bagi peserta didik untuk mengerjakan Latihan C nomor 7. Soal ini baik untuk membantu peserta didik menggunakan pengetahuannya mengenai pembagian polinomial dan Teorema Sisa.

Refleksi

Sebagai aktivitas refleksi pembelajaran, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa pada nomor 6–8 berdasarkan pengalaman belajarnya di subbab Pembagian Polinomial.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Latihan A-Buku Siswa

Alternatif Penyelesaian

1. Benar. Sesuai dengan Sifat 2.2, derajat dari sisa pembagian selalu kurang dari derajat dari pembagi.
2. Salah. Hasil dari metode Horner yang diberikan jika dituliskan dalam bentuk algoritma pembagian akan menjadi seperti berikut.

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 8x - 10}{x + 5} = x - x + 3 + \frac{5}{x + 5}$$

3. *k*. Hasil ini sesuai dengan Teorema Sisa.

4. Pembagian $P(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$ oleh $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ dapat dilakukan dengan cara bersusun seperti berikut.

$$
\begin{array}{r l}
 & x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 25 \\
x^2 - 4x + 3 \,\big) & x^6 + 0x^5 - x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x - 1 \\
 & \underline{x^6 + 2x^5 - x^4} \quad - \\
 & -2x^5 - 0x^4 + 0x^3 \\
 & \underline{-2x^5 - 4x^4 + 2x^3} \quad - \\
 & 4x^4 - 2x^3 + x^2 \\
 & \underline{2x^4 - 8x^3 + 4x^2} \quad - \\
 & -10x^3 + 5x^2 + 0x \\
 & \underline{-10x^3 + 20x^2 + 10x} \quad - \\
 & 25x^2 + 10x + 1 \\
 & \underline{25x^2 + 50x - 25} \quad - \\
 & -60x + 24
\end{array}
$$

Dari pembagian bersusun tersebut diperoleh hasil baginya $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 25$ dan sisanya $-60x + 24$. Dengan demikian, bentuk pembagian tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$x^6 - x^4 + x^2 - 1 = (x^2 + 2x - 1)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 25) - 60x + 24$

5. Metode Horner yang digunakan untuk melakukan pembagian polinomial-polinomial yang diberikan ditunjukkan seperti berikut.

−3	1	5	2	11	−15
		−6	3	−15	12
	2	−1	5	−4	−3

Dengan demikian, hasil bagi dan sisa pembagiannya secara berturut-turut adalah $2x^3 - x^2 + 5x - 4$ dan −3.

6. Pembagian bersusun yang ditampilkan sudah tepat. Kekeliruannya terletak pada pengambilan kesimpulan di metode Horner. Seharusnya, berdasarkan proses metode Horner yang ditampilkan, hasil baginya adalah $2(x - 1) + 9 = 2x + 7$. (Penjelasan lebih lengkapnya bisa dilihat di kolom Mari, Berkolaborasi di subbab ini.)

7. Sisa pembagian $P(x) = 3x^6 - 11x^5 + x^3 + 20x^2 - 3$ oleh $x - 2/3$ ditentukan sebagai berikut.

2/3	3	−11	0	1	20	0	−3
		2	−6	−4	−2	12	8
	3	−9	−6	−3	18	12	5

Jadi, nilai $P(2/3) = 5$.

8. Polinomial $P(x)$ jika dibagi $x - 2$ sisanya -3, dan jika dibagi $x + 3$ sisanya -13 sehingga dengan menggunakan Teorema Sisa kita peroleh $P(2) = -3$ dan $P(-3) = -13$. Jika $P(x)$ dibagi dengan $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, sisanya dapat dituliskan menjadi $ax + b$. Dengan algoritma pembagian, hal ini dapat dituliskan menjadi bentuk berikut.

$$P(x) = (x - 2)(x + 3) \cdot H(x) + ax + b$$

Karena $P(2) = -3$ dan $P(-3) = -13$, maka $-3 = 2a + b$ dan $-13 = -3a + b$. Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, diperoleh $a = 2$ dan $b = -7$. Jadi, sisa pembagian $P(x)$ oleh $x^2 + x - 6$ adalah $2x - 7$.

8. (a) $Q(x) = ((2x - 9)x + 7)x - 10 = (2x - 9)x^2 + 7x - 10 = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 10 = P(x)$. Jadi, terbukti bahwa $P(x) = Q(x)$.

(b) $P(4) = 2$ dan $Q(4) = 2$.

(c) $R(x) = x^4 - 13x^3 + 23x^2 - 12x + 10 = (((x - 13)x + 23)x - 12)x + 10$. Dengan demikian, $R(11) = -1$.

(d) Pembagian $R(x)$ dengan $x - 11$ dengan metode Horner ditunjukkan seperti berikut.

$$\begin{array}{c|ccccc} 11 & 1 & -13 & 23 & -12 & 10 \\ & & 11 & 22 & 11 & -11 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -1 & \boxed{-1} \end{array} +$$

(e) Untuk menentukan $R(11)$, urutan operasi-perasi yang digunakan di bagian (c) sama dengan langkah-langkah dalam metode Horner di bagian (d).

b. Penugasan

Di akhir Aktivitas 1, Bapak/Ibu dapat menugaskan peserta didik mengerjakan kolom Mari, Berpikir Kreatif. Di akhir Aktivitas 2, bapak/ibu dapat memberikan tugas berupa kolom Mari, Berkolaborasi. Di akhir Aktivitas 3, kolom Mari, Mengomunikasikan juga dapat ditugaskan kepada peserta didik untuk dikerjakan di luar kelas.

Bapak/Ibu juga dapat menugaskan peserta didik mengerjakan beberapa soal Latihan C. Soal-soal tersebut adalah soal nomor 6, 8, dan 9. Soal-soal ini dapat memfasilitasi peserta didik mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilan yang mereka peroleh di subbab Pembagian Polinomial.

D. Panduan Pembelajaran: Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

1. Persiapan Pembelajaran

Pembelajaran dalam subbab Faktor dan Pembuat Nol Polinomial terdiri atas tiga aktivitas. Pertama, peserta didik diajak untuk menemukan Teorema Faktor dan menggunakannya untuk memfaktorkan polinomial. Kedua, peserta didik akan menentukan hubungan antara faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial. Terakhir, peserta didik dikenalkan dengan faktorisasi penuh polinomial dan menggunakannya untuk melakukan pemfaktoran polinomial dan menentukan pembuat nol kompleksnya.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Faktor dan Pembuat Nol Polinomial, peserta didik diharapkan akan memiliki kemampuan berikut.

- Menggunakan Teorema Faktor untuk memfaktorkan polinomial secara komplet.
- Menentukan hubungan antara faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial.
- Menentukan semua pembuat nol kompleks dari suatu polinomial.

b. Alat dan Bahan

Tidak ada alat dan bahan khusus yang diperlukan dalam pembelajaran di subbab Faktor dan Pembuat Nol Polinomial.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Faktor dan Pembuat Nol Polinomial, Bapak/Ibu Guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana Bapak/Ibu akan menghubungkan pembelajaran sebelumnya, yaitu Teorema Sisa, dengan Teorema Faktor yang akan dipelajari peserta didik?
- Bagaimana cara Bapak/Ibu agar peserta didik memahami hubungan antara faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial?

- Transisi seperti apa yang perlu dilakukan agar peserta didik yang awalnya terampil menentukan pembuat nol real menjadi juga terampil dalam menentukan pembuat nol kompleks?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Di awal pembelajaran, Bapak/Ibu sebaiknya mengingatkan peserta didik tentang pembagian polinomial. Beri tahu peserta didik bahwa pembagian polinomial tersebut masih akan digunakan dalam pembelajaran yang akan dilakukan. Setelah itu, mintalah peserta didik mencermati dan mengerjakan aktivitas eksplorasi "Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial". Setelah selesai, mintalah beberapa peserta didik untuk menunjukkan pilihannya beserta dengan alasannya.

Eksplorasi—Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial

Alternatif Penyelesaian

Pilihan peserta didik akan bervariasi. Berikut ini contoh alasan mengapa peserta didik memilih setiap pembagian polinomialnya.

1. $\dfrac{x^2 + 4x - 2}{x - 1} = x + 5 + \dfrac{3}{x - 1}$

   Dibandingkan dengan pilihan yang lain, pembagian ini menghasilkan sisa bilangan positif.

2. $\dfrac{2x^2 + 9x + 2}{x + 3} = 2x + 3 - \dfrac{5}{x + 3}$

   Dibandingkan dengan yang lain, pembagian ini menghasilkan sisa bilangan negatif.

3. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4} = x + 3$

   Dibandingkan dengan yang lain, pembagian ini tidak memiliki sisa. Dengan kata lain, sisa pembagiannya adalah nol.

4. $\dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1} = x - 2 + \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$

   Dibandingkan dengan pilihan lain, pembagian ini sisanya berupa polinomial berderajat satu.

b. Aktivitas 1

Bapak/Ibu Guru perlu membagi peserta didik menjadi beberapa kolompok yang terdiri atas 3–4 peserta didik. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menuju Teorema Faktor".

Eksplorasi—Menuju Teorema Faktor

Alternatif Penyelesaian

1. Berikut ini adalah isian tabel yang diberikan.

$P(x)$	c	$P(c)$	$P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S(x)$
$P(x) = x^2 - x - 12$	4	0	$P(x) = (x - 4)(x + 3) + 0$
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$	−3	0	$P(x) = (x + 3)(x^2 - 9) + 0$
$P(x) = x^4 - 16$	−2	0	$P(x) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + 0$

2. Dugaan Ambar benar. Jika c adalah pembuat nol P, maka $P(c) = 0$. Berdasarkan Teorema Sisa, sisa pembagian $P(x)$ dengan $x - c$ adalah 0. Hal ini dapat dituliskan menjadi $P(x) = (x - c) \cdot H(x) + 0 = (x - c)H(x)$. Jadi, $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$.
3. Dugaan Ambar benar. Jika $x - c$ faktor dari polinomial $P(x)$, maka $P(x)$ dapat dituliskan menjadi $P(x) = (x - c) \cdot H(x)$. Jika kita substitusi $x = c$ ke dalam persamaan tersebut, kita peroleh $P(c) = (c - c) \cdot H(c) = 0 \cdot H(c) = 0$. Jadi, c adalah pembuat nol dari P.

Setelah peserta didik menyelesaikan aktivitas eksplorasi, Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa kelompok untuk menyajikan hasil pekerjaannya. Setelah itu, ajaklah peserta didik-peserta didik lainnya untuk mendiskusikan hasil pekerjaan tersebut. Setelah diskusi, tegaskan bahwa apa yang ditemukan peserta didik di aktivitas eksplorasi tersebut merupakan Teorema Faktor. Bapak/Ibu Guru kemudian dapat menjelaskan Sifat 2.4.

Setelah peserta didik memahami Teorema Faktor, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik mencermati **Contoh 2.10** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba di contoh tersebut. Pengerjaan bagian Mari, Mencoba tersebut bisa dilakukan secara individu ataupun kelompok.

Mari, Mencoba 2.10

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan metode Horner, kita akan menunjukkan bahwa $P(-1) = 0$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -2 & -21 & -18 \\
 & & -1 & 3 & 18 \\
\hline
 & 1 & -3 & -18 & \boxed{0}
\end{array}
+
$$

Dari metode Horner tersebut, kita peroleh hasil baginya $x^2 - 3x - 18$ dan sisanya 0. Dengan menggunakan Teorema Sisa, maka $P(-1) = 0$. Selanjutnya, kita faktorkan $P(x)$ secara komplet.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^2 - 2x^2 - 21x - 18 \\
&= (x + 1)(x^2 - 3x - 18) \\
&= (x + 1)(x + 3)(x + 6)
\end{aligned}
$$

Setelah menyelesaikan pengerjaan bagian Mari, Mencoba, Bapak/Ibu Guru dapat meminta satu atau beberapa peserta didik untuk menampilkan pengerjaannya. Jika perlu, berilah nilai tambahan kepada peserta didik tersebut. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk mencermati dan menjawab kolom Mari, Berpikir Kritis. Jika sudah selesai, mintalah satu atau beberapa peserta didik untuk mempresentasikan jawabannya. Jika perlu, berilah juga peserta didik tersebut nilai tambahan.

Mari, Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

(a) Misalkan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Karena jumlah semua koefisien dan konstantanya nol, maka $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Selanjutnya, kita tentukan $P(1)$.

$$
\begin{aligned}
P(1) &= a_n 1^n + a_{n-1}1^{n-1} + a_{n-2}1^{n-2} + \ldots + a_1 1 + a_0 \\
&= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $P(1) = 0$, berdasarkan Teorema Faktor, $x - 1$ adalah faktor dari $P(x)$. Jadi, dugaan Ajeng terbukti, yaitu jika jumlah semua koefisien dan konstanta dari suatu polinomial sama dengan nol, maka $x - 1$ merupakan faktor dari polinomial tersebut.

(b) Prinsipnya Ajeng benar. Misalkan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ dan jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap sama dengan yang ganjil. Selanjutnya, kita tentukan P(−1).

$P(-1) = a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_{n-2}(-1)^{n-2} + \ldots + a_1(-1) + a_0$

Jika $P(x)$ berderajat ganjil (n ganjil), maka nilai $P(-1)$ menjadi seperti berikut.

$P(-1) = -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots - a_1 + a_0 = (a_{n-1} + \ldots + a_0) - (a_n + a_{n-2} + \ldots + a_0)$

Dengan kata lain, $P(-1)$ sama dengan jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap dikurangi dengan jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya ganjil. Karena diketahui bahwa jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap sama dengan yang ganjil, maka $P(-1) = 0$. Dengan cara yang sama juga dapat dibuktikan untuk $P(x)$ yang berderajat genap. Jadi, prinsip Ajeng terbukti benar.

Bapak/Ibu Guru dapat melanjutkan pembelajaran dengan menjelaskan Sifat 2.5. Jelaskan juga pentingnya sifat tersebut, yaitu bahwa sifat tersebut dapat membantu peserta didik untuk menentukan pembuat nol rasional dari suatu polinomial. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati **Contoh 2.11** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut secara individu. Setelah selesai, mintalah peserta didik untuk mengumpulkan jawabannya.

Mari, Mencoba 2.11

Alternatif Penyelesaian

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20 = (x - 2)^2(2x + 5)$. Sebagai catatan, pembuat nol P adalah 2 dan 5/2. Semua pembuat nol tersebut sejalan dengan Sifat 2.5, yaitu pembilanganya merupakan faktor dari 20 dan penyebutnya merupakan faktor dari 2.

c. Aktivitas 2

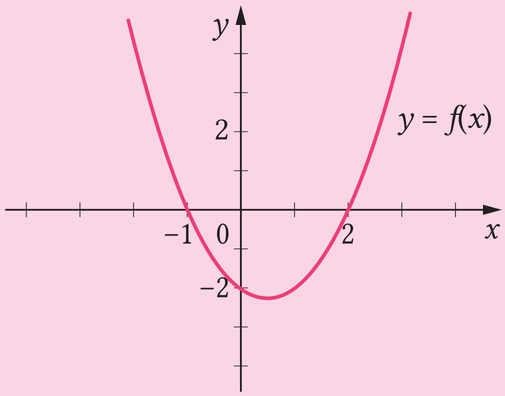
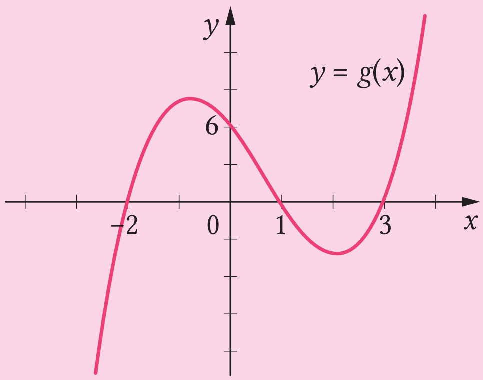
Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan pembelajaran kooperatif di dalam Aktivitas 2 ini. Untuk itu, pertama, berilah waktu bagi setiap peserta didik untuk mencermati dan mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menemukan Koneksi antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya". Setelah itu, mintalah peserta didik untuk membagikan pemikiran dan jawabannya kepada teman sebangkunya (atau teman di dekatnya). Kemudian, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk

membagikan hasil diskusinya secara klasikal. Peran Bapak/Ibu Guru di sini adalah untuk mengarahkan diskusi agar menjadi produktif dan menegaskan kesimpulan dari aktivitas eksplorasi tersebut.

Eksplorasi—Menemukan Koneksi antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya

Alternatif Penyelesaian

1. Berikut ini adalah tabel yang sudah dilengkapi.

Fungsi Polinomial	Grafik
$f(x) = x^2 - x - 2$ Bentuk pemfaktoran: $f(x) = (x + 1)(x - 2)$	
$g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ Bentuk pemfaktoran: $g(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$	

2. Dari hasil di nomor 1, dapat disimpulkan bahwa faktor-faktor polinomial bersesuaian dengan perpotongan grafik fungsi polinomial tersebut terhadap sumbu X. Berdasarkan Teorema Faktor, faktor-faktor dari polinomial berhubungan dengan pembuat nol polinomial tersebut. Jika digambarkan di dalam bidang koordinat, pembuat nol tersebut direpresentasikan sebagai titik potong dengan sumbu X.

Setelah diskusi selesai, Bapak/Ibu Guru dapat melanjutkan pembelajaran dengan meminta peserta didik membaca **Contoh 2.12** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut. Setelah itu, mintalah beberapa peserta didik untuk menampilkan jawabannya di depan kelas untuk kemudian didiskusikan secara klasikal.

Mari, Mencoba 2.12

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan perpotongannya dengan sumbu *X*, pertama kita cari pembuat nol dari $g(x)$.

$x^3 - 3x + 2 = 0$	Menentukan pembuat nol $g(x)$
$(x + 2)(x - 1)^2 = 0$	Faktorkan

Berdasarkan sifat hasil kali nol, pembuat nolnya adalah $x = -2$ dan 1. Dengan demikian, perpotongan grafik fungsi *g* dengan sumbu *X* adalah $(-2, 0)$ dan $(1, 0)$.

d. Aktivitas 3

Di awal Aktivitas 3, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk membaca dan mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menemukan Semua Pembuat Nol Suatu Polinomial". Setelah itu, mintalah peserta didik untuk membagikan dan mendiskusikan hasil pengerjaannya kepada teman di sebelahnya. Kemudian, Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil diskusinya. Dari presentasi ini, undanglah peserta-peserta didik lain untuk memberikan tanggapan terhadap presentasi tersebut. Di sini, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan arahan agar diskusinya berjalan secara produktif.

Eksplorasi—Menemukan Semua Pembuat Nol Suatu Polinomial

Alternatif Penyelesaian

1. Mungkin banyak peserta didik yang hanya menemukan bilangan real yang memenuhi, yaitu 3 dan −3. Akan tetapi, terdapat dua bilangan kompleks yang tidak real yang juga memenuhi, yaitu $3i$ dan $-3i$.
2. Jika bilangan yang dicari adalah x, permasalahan awal dapat dituliskan menjadi $x^4 = 81$. Dengan mengurangi kedua ruas dengan 81, persamaan tersebut setara dengan $x^4 - 81 = 0$.

3. Empat selesaian tersebut adalah −3, −3i, 3i, dan 3.

4. $x^4 - 81 = (x + 3)(x + 3i)(x - 3i)(x - 3)$

Bapak/Ibu Guru perlu menghubungkan jawaban nomor 4 aktivitas eksplorasi "Menemukan Semua Pembuat Nol Suatu Polinomial" dengan Sifat 2.6. Setelah itu, mintalah peserta didik secara mandiri untuk mencermati **Contoh 2.13** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba di contoh tersebut. Setelah selesai, mintalah satu atau beberapa peserta didik untuk menampilkan dan menjelaskan jawabannya di depan kelas. Jika perlu, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan nilai tambahan kepada peserta didik tersebut.

Mari, Mencoba 2.13

Alternatif Penyelesaian

Pembuat nol kompleksnya adalah −1, 2 − i, dan 2 + i. Dengan demikian, bentuk pemfaktorannya adalah $P(x) = (x + 1)(x - (2 - i))(x - (2 + i)) = (x + 1)(x - 2 + i)(x - 2 - i)$.

Terakhir, berilah peserta didik tugas untuk mengerjakan kolom Mari, Berpikir Kritis.

Mari, Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

Tidak mungkin. Jika suatu polinomial memiliki tepat satu pembuat nol yang merupakan bilangan kompleks yang bukan bilangan real, koefisien atau konstantanya ada yang bukan bilangan real.

Alternatif Pembelajaran

Untuk memperdalam pemahaman peserta didik mengenai faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan aktivitas pembelajaran interaktif di *https://s.id/AltPolinomial*. Aktivitas pembelajaran tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mencari koneksi antara faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial yang telah dipelajarinya.

e. Pendinginan

Di dalam aktivitas pendinginan, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengulas kembali apa saja yang telah dipelajari di subbab Faktor dan Pembuat Nol Polinomial. Untuk melakukannya, Bapak/Ibu Guru dapat menanyakan beberapa pertanyaan berikut.

- Bagaimana isi Teorema Faktor? Bagaimana kalian dapat menggunakannya untuk memfaktorkan polinomial?
- Apa hubungan antara faktor, pembuat nol, dan grafik fungsi polinomial?
- Dari pengalaman belajar kalian, bagaimana cara kalian menentukan pembuat nol kompleks suatu polinomial?

Untuk melakukan evaluasi terhadap pembelajaran yang telah dilakukan oleh peserta didik, mintalah peserta didik untuk mengerjakan soal Latihan D nomor 6. Untuk mengerjakan soal tersebut, berilah peserta didik waktu 5 menit.

Refleksi

Untuk memfasilitasi peserta didik berefleksi terhadap pengalaman belajarnya, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa nomor 9–11 berdasarkan pengalaman belajarnya di subbab Faktor dan Pembuat Nol Polinomial.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

1. $(x - 10)$
2. Salah. Jika grafik fungsi polinomial $P(x)$ memotong sumbu X di titik $(3, 0)$, pembuat nolnya adalah $x = 3$. Dengan demikian, yang menjadi faktor $P(x)$ adalah $x - 3$.
3. Salah. Ada fungsi polinomial lainnya, misalnya $Q(x) = 2(x + 7)(x + 3)(x - 2)$.
4. $P(-3) = (-3)^4 - 2(-3)^3 - 13(-3)^2 + 14(-3) + 24 = 81 + 54 - 117 - 42 + 24 = 0$ dan $P(2) = (2)^4 - 2(2)^3 - 13(2)^2 + 14(2) + 24 = 16 - 16 - 52 + 28 + 24 = 0$. Bentuk pemfaktorannya adalah $(x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3)$.
5. $R(x) = (5x - 3)(x - 2)(x - 3)$
6. Grafik $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$ memotong sumbu X di $(-1, 0)$ dan $(1, 0)$. Karena $f(0) = (0 + 1)^2(0 - 1)^2 = 1$, grafiknya memotong sumbu Y di $(0, 1)$. Karena fungsi polinomial ini berderajat genap dan koefisien utamanya positif, perilaku ujung grafiknya adalah naik ke kanan dan naik ke kiri (↖, ↗). Dengan demikian, grafik yang tepat adalah grafik (a).
7. Dilihat dari bentuk dan perilaku ujungnya (↖, ↘), grafik yang diberikan merupakan grafik fungsi polinomial berderajat 3 dengan koefisien utama negatif. Dengan demikian, dari pilihan yang diberikan, fungsi yang paling tepat adalah $g(x) = -x^3 - x^2 + 6x$. Selain itu, karena $g(x) = -x^3 - x^2 + 6x = -x(x + 3)(x - 2)$, grafik fungsi ini memotong sumbu Y di $(0, 0)$, $(-3, 0)$, dan $(2, 0)$. Hal ini juga sesuai dengan grafik yang diberikan.
8. Polinomial berderjat 4 yang pembuat nolnya -3, 0, 1, dan 4 adalah $P(x) = a(x + 3)x(x - 1)(x - 4) = a(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x)$. Karena koefisien x^2-nya adalah 11, maka $a = -1$. Jadi, polinomial tersebut adalah $P(x) = -x^4 + 2x^3 + 11x^2 - 12x$.
9. Jika $x + 2$ dan $x - 3$ adalah faktor dari $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 18$, maka berdasarkan Teorema Faktor, $P(-2) = 0$ dan $P(3) = 0$. Dengan demikian, diperoleh sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{cases} 4a - 2b + 2 = 0 \\ 9a + 3b + 72 = 0 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem tersebut, diperoleh $a = -5$ dan $b = -9$.

10. Semua pembuat nol kompeks $R(x)$ adalah -3, 3, $-2i$, dan $2i$. Dengan demikian, $R(x) = (x + 3)(x - 3)(x + 2i)(x - 2i)$.
11. $x = -3,\ 2-\sqrt{2}$, dan $2+\sqrt{2}$
12. Diketahui sebuah peti kemas memiliki panjang 1 meter lebih dari dua kali lebarnya, sedangkan tingginya dua kali lebarnya. Volume peti kemas tersebut 936 m^3. Misalkan l adalah lebar peti kemas tersebut. Maka, informasi tersebut dapat dimodelkan sebagai berikut.

    $$(2l + 1)l(2l) = 936$$

    Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $l = 6$. Dengan demikian, panjang, lebar, dan tinggi peti kemas tersebut adalah 13 m, 6 m, dan 12 m. Luas permukaan peti kemas tersebut adalah $2(13 \times 6 + 13 \times 12 + 6 \times 12) = 612$ m^2.

b. Penugasan

Di akhir Aktivitas 3, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan tugas kolom Mari, Berpikir Kritis. Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat memberikan tugas peserta didik untuk mengerjakan Latihan D nomor 8, 9, 11, dan 12.

E. Panduan Pembelajaran: Identitas Polinomial

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Identitas Polinomial terdiri atas satu aktivitas pembelajaran. Dalam aktivitas pembelajaran tersebut, peserta didik dikenalkan dengan identitas polinomial dan berlatih bagaimana membuktikan identitas polinomial. Selain itu, peserta didik juga berlatih menggunakan identitas polinomial untuk melakukan pemfaktoran polinomial.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Identitas Polinomial, peserta didik diharapkan akan memiliki kemampuan berikut.

- Membuat identitas polinomial dan membuktikannya.
- Menggunakan identitas polinomial untuk melakukan pemfaktoran polinomial.

b. Alat dan Bahan

Tidak ada alat dan bahan khusus yang digunakan dalam pembelajaran pada subbab Identitas Polinomial.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Identitas Polinomial, Bapak/Ibu Guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana Bapak/Ibu Guru memanfaatkan permainan sulap matematis untuk memotivasi peserta didik mempelajari identitas polinomial?
- Bagaimana pendampingan Bapak/Ibu Guru ke peserta didik agar mereka mampu membuktikan identitas polinomial dan menggunakan identitas polinomial untuk faktorisasi polinomial?
- Kesalahan dan miskonsepsi apa yang kemungkinan akan dialami peserta didik ketika mempelajari identitas polinomial?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Di awal pembelajaran, Bapak/Ibu dapat menceritakan kepada peserta didik bahwa matematika itu menyenangkan. Untuk mendukungnya, Bapak/Ibu dapat mengajak peserta didik melakukan permainan seperti yang disajikan di aktivitas eksplorasi "Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial". Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk berdiskusi mengenai permainan tersebut.

Eksplorasi Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial

Alternatif Penyelesaian

Jawaban dapat bervariasi. Dari sekian banyak kemungkinkan, berikut ini diilustrasikan ketika peserta didik memilih bilangan 7.

1. Misalnya, bilangan yang terpilih adalah 7.
2. $7 + 1 = 8$ dan $7 - 1 = 6$. Hasil kali keduanya adalah $8 \cdot 6 = 48$.
3. $48 + 11 = 59$.
4. $59 - 7^2 = 59 - 49 = 10$

   Hasil akhir yang diperoleh adalah 10.

b. Aktivitas

Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik bekerja secara berpasangan, misalnya dengan teman sebangkunya. Beri tahu peserta didik bahwa apa yang akan mereka kerjakan selanjutnya adalah untuk mencari tahu mengapa hasil akhir yang mereka temukan di kegiatan pemanasan sebelumnya selalu bilangan 10. Untuk itu, mintalah peserta didik untuk melanjutkan pengerjaan di aktivitas eksplorasi "Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial".

Eksplorasi Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial

Alternatif Penyelesaian

(a) $(x + 1)(x - 1) + 11 - x^2$

(b) $(x + 1)(x - 1) + 11 - x^2 = x^2 - 1 + 11 - x^2 = 10$

(c) Persamaan yang digunakan adalah $(x + 1)(x - 1) + 11 - x^2 = 10$. Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan $x^2 - 11$, maka kita peroleh $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$. Persamaan tersebut setara dengan $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

(d) Jawaban bisa bervariasi. Misalnya, dengan mengurangi kedua ruas persamaan $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ dengan x^2, kita peroleh $(x + 1)(x - 1) - x^2 = -1$. Persamaan ini dapat digunakan sebagai instruksi permainan sulap yang selalu menghasilkan bilangan -1.

Setelah menyelesaikan aktivitas eksplorasi, Bapak/Ibu Guru perlu menegaskan bahwa persamaan polinomial yang digunakan dalam permainan sulap dalam aktivitas eksplorasi tersebut selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai x. Jelaskan bahwa persamaan seperti itu disebut identitas polinomial. Setelah itu, jelaskan beberapa identitas polinomial yang disajikan dalam Sifat 2.7.

Bapak/Ibu selanjutnya perlu meminta peserta didik untuk melanjutkan pembelajaran dengan mencermati **Contoh 2.14** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut. Setelah selesai, mintalah beberapa peserta didik untuk menunjukkan jawabannya untuk didiskusikan secara klasikal.

Mari, Mencoba 2.14

Alternatif Penyelesaian

(a) Bukan identitas polinomial, karena ada $m = 1$ sedemikian sehingga $(2 \cdot 1 - 3)^3 = -25 \neq -19 = 8 \cdot 1^3 - 27$.

(b) Persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial. Untuk membuktikannya, bentuk di ruas kiri perlu dijabarkan dan hasilnya sama dengan bentuk di ruas kanan.

$$(2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 9 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$$

Kegiatan pembelajaran dapat dilanjutkan dengan pengerjaan kolom Mari, Berkolaborasi. Pengerjaan tersebut sebaiknya dilakukan secara berpasangan.

Mari Berkolaborasi

Alternatif Penyelesaian

Jawaban bervariasi.

Setelah peserta didik menyelesaikan pengerjaan soal di kolom Mari, Berkolaborasi, Bapak/Ibu Guru perlu meminta peserta didik mencermati **Contoh 2.15** dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba contoh tersebut. Setelah selesai, mintalah peserta didik untuk mengumpulkan pekerjaannya.

Mari, Mencoba 2.14

Alternatif Penyelesaian

Bentuk pemfaktorannya adalah $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

c. Pendinginan

Dalam aktivitas pendinginan, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik secara individu untuk menuliskan apa saja yang telah mereka pelajari. Tulisan tersebut dapat diawali dengan, "Hari ini saya belajar tentang ...". Selain itu, mintalah juga mereka untuk menuliskan beberapa hal yang menurut mereka masih sukar untuk dipahami. Setelah itu, mintalah beberapa dari mereka untuk membacakan tulisannya tersebut untuk ditanggapi oleh guru.

Sebagai evaluasi formatif, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan soal Latihan E nomor 5 selama 5 menit. Setelah selesai, mintalah peserta didik untuk mengumpulkan jawabannya.

Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa nomor 12–13 berdasarkan pengalaman belajarnya di subbab Identitas Polinomial.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Ada persamaan polinomial yang bukan merupakan identitas polinomial, misalnya $x^2 = 1$.
2. Benar. Identitas polinomial adalah persamaan polinomial yang selalu benar untuk semua kemungkinan nilai variabelnya.
3. $(p - q)(p^2 + pq + q^2)$
4. (a) Persamaan yang diberikan bukan merupakan identitas polinomial, karena ada $x = 0$ sedemikian sehingga $3(0 - 1)^2 = 3 \neq 9 = (3 \cdot 0 - 3)^2$.

   (b) Persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial. Pembuktiannya disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(a - b + c)^2 &= (a - b + c)(a - b + c)\\ &= a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc\\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab - ac + bc)\end{aligned}$$

5. Perhatikan bahwa $(x^2 + x - 6)(x - 4) = (x + 3)(x - 2)(x - 4) = (x + 3)(x^2 - 6x + 8) = (x^2 - 6x + 8)(x + 3)$. Dengan demikian, agar $(x^2 + x - 6)(x - 4) = P(x) \cdot (x + 3)$ menjadi sebuah identitas, maka $P(x) = x^2 - 6x + 8$.
6. Pernyataan Togar benar. Misalkan x sembarang bilangan bulat, maka x dan $x + 1$ adalah dua bilangan yang berurutan. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $(x + 1)^2 - x^2 = x + (x + 1)$.

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 - x^2 &= x^2 + 2x + 1 - x^2\\ &= 2x + 1\\ &= x + (x + 1)\end{aligned}$$

   Jadi, terbukti bahwa pernyataan Togar benar.

7. Misalkan, a dan b adalah bilangan-bilangan real positif dengan $a > b$. Akan dibuktikan bahwa $a^2 - b^2$, $2ab$, dan $a^2 + b^2$ merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku. Dengan kata lain, ketiga bilangan tersebut memenuhi tripel Pythagoras.

$$
\begin{aligned}
(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 \\
&= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \\
&= (a^2 + b^2)^2
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $a^2 - b^2$, $2ab$, dan $a^2 + b^2$ merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku.

8. (a) $16(4 - 3x)^2 - 25 = 3(4x - 7)(12x - 11)$

(b) $m^4 + 6m^2n^2 + 9n^4 = (m^2 + 3n^2)^2$

9. Titik potongnya adalah $(-\sqrt{5}{,}25 + 9\sqrt{5})$ dan $(\sqrt{5}{,}25 - 9\sqrt{5})$Penugasan

b. Penugasan

Bapak/Ibu Guru dapat memberikan tugas peserta didik untuk mengerjakan soal Latihan E nomor 4, 5, 6, 7, dan 8. Soal nomor 4 dan 8 dapat digunakan untuk mengasah kefasihan peserta didik dalam membuktikan dan menggunakan identitas polinomial. Soal nomor 5, 6 dan 7 memfasilitasi peserta didik untuk mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilannya di subbab Identitas Polinomial.

I. Alternatif Penyelesaian : Uji Kompetensi

1. Salah
2. Benar
3. Benar
4. $n + m$
5. $P(-4)$
6. $(-5, 0)$
7. Derajatnya secara berturut-turut 4 dan 7.
8. Perilaku ujungnya mengarah ke kiri atas dan kanan bawah (↖, ↘) sehingga grafik B yang paling sesuai.
9. $2mn - 2m + 2n^2 - 2$
10. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 3 = (x + 2)(x - 2)(x^2 + x + 1) + 4x + 1$
11. -1

12. $(-\sqrt{5}, 0)$, $(-1, 0)$, dan $(\sqrt{5}, 0)$

13. Semua pembuat nol kompleksnya adalah $1-\sqrt{3}$, 2, dan $1+\sqrt{3}$ sehingga bentuk pemfaktorannya menjadi $(x - 1 + \sqrt{3})(x - 2)(x - 1 - \sqrt{3})$.

14. Persamaan $49 - (2x + 7)^2 = -2x(14 + 2x)$ merupakan identitas polinomial karena $49 - (2x + 7)^2 = 7^2 - (2x + 7)^2 = [7 - (2x + 7)][7 + (2x + 7)] = -2x(14 + 2x)$.
Persamaan $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ juga merupakan identitas polinomial karena $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$.

15. $L = \pi x^2$

16. (a) $L = 7000$ cm^2
(b) $L(x) = 6x^2 - 420x + 7000$
(c) $x = 10$ cm

17. (a) $V(x) = 36x^2 - 2x^3$
(b) $D = \{x \mid 0 < x < 18, x \in \mathbb{R}\}$
(c) 1728 cm^3

18. Rp115.762.500,00

19. (a) $25\sqrt{3} - 20$ m atau sekitar 23,3 m
(b) $\frac{25}{8}(5\sqrt{3} + \sqrt{139})$ m atau sekitar 63,9 m

20. Karena dengan jendela tampilan kalkulator yang dipilih, Nyoman hanya akan melihat satu grafik saja, yaitu grafik $y = (2x + 3)(2x - 3)$. Tetapi ketika dia memperluas jendela tampilannya (misalnya sumbu X diatur mulai -5 sampai 5 dan sumbu Y mulai -10 sampai 20), dia akan melihat dua grafik yang berbeda.

21. (a) Tiga pembuat nol real (duanya kembar)
(b) Dua pembuat nol real dan dua pembuat nol tak real
(c) Tiga pembuat nol real dan 4 pembuat nol tak real

22. Jika p/q adalah pembuat nol rasional (dalam bentuk paling sederhana) dari polinomial $P(x)$, maka

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \mathrm{K} + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$p\,(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-2}q + \mathrm{K} + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Karena p adalah faktor dari bentuk ruas kiri, berarti p juga menjadi faktor dari bentuk ruas kanan. Karena p/q merupakan bentuk paling sederhana, maka p dan q tidak memiliki faktor persekutuan sehingga p faktor dari a_0. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa q merupakan faktor dari a_n.

J. Alternatif Penyelesaian Proyek: Strategi Menang Lelang

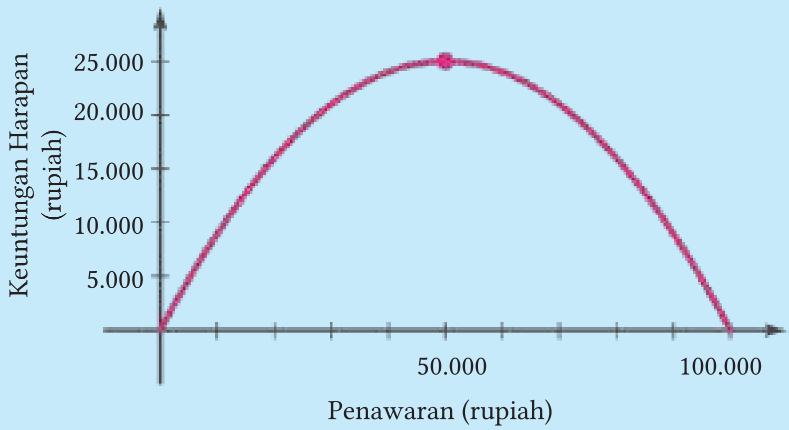
1. Berikut ini tabel penawaran dan keuntungan yang bersesuaian.

Penawaran	10.000	20.000	40.000	80.000	p
Keuntungan	90.000	80.000	60.000	20.000	$100.000 - p$

2. Peluangnya adalah sekitar 20.000/100.000 = 0,2.
3. Peluangnya adalah $p/100.000$.
4. Keuntungan harapannya sama dengan peluang menang dikalikan keuntungannya. Jika penawaran yang diberikan adalah p, keuntungan harapannya dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{p}{100.000} \cdot (100.000 - p) = p - \frac{p^2}{100.000}$$

Grafik keuntungan harapan terhadap penawarannya ditunjukkan seperti berikut.

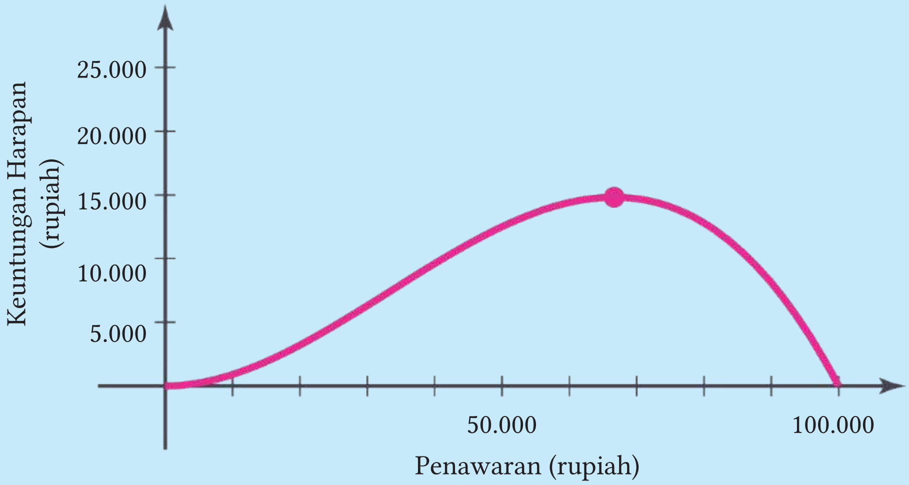


Dengan menggunakan rumus nilai maksimum untuk fungsi kuadrat, keuntungan harapan maksimumnya adalah Rp25.000,00.

5. Penambahan orang tidak akan mempengaruhi keuntungan yang diperoleh. Jika penawarannya p, keuntungannya tetap $100.000 - p$. Akan tetapi, penambahan orang tersebut akan mempengaruhi peluang menangnya. Dengan penawaran p, peluang untuk mengalahkan teman pertama adalah $p/100.000$ dan peluang untuk mengalahkan teman kedua adalah $p/100.000$. Dengan demikian, peluang untuk mengalahkan teman pertama dan kedua adalah $(p/100.000) \cdot (p/100.000) = (p/100.000)^2$. Akibatnya, keuntungan harapannya dapat dimodelkan dengan rumus berikut.

$$\left(\frac{p}{100.000}\right)^2 (100.000 - p) = \frac{p^2}{100.000} - \frac{p^2}{10.000.000.000}$$

Grafik keuntungan harapan terhadap penawarannya sekarang menjadi seperti berikut.

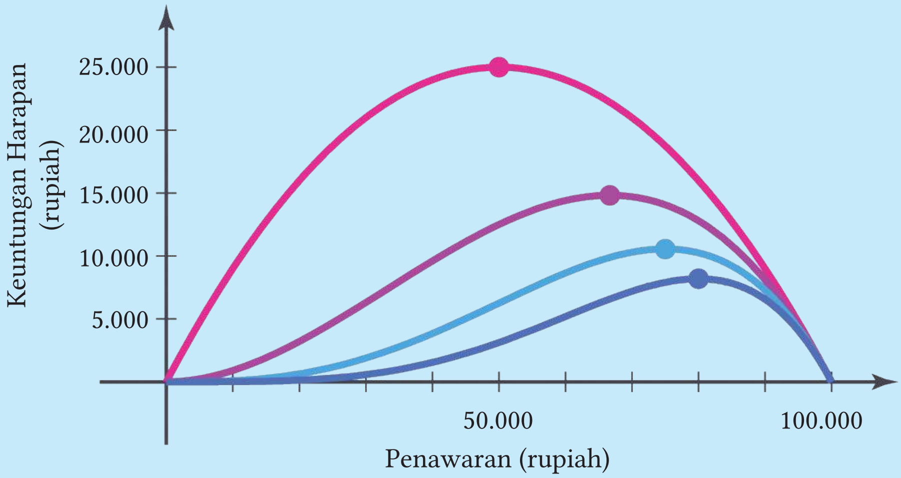


Dengan menggunakan bantuan kalkulator grafik, keuntungan harapan maksimumnya adalah Rp14.814,80.

6. Jika peserta lelang ada n orang, untuk penawaran sebesar p rupiah, keuntungan harapannya dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$\left(\frac{p}{100.000}\right)^{n-1} (100.000 - p)$$

Makin banyak peserta lelangnya, keuntungan harapan maksimumnya makin kecil. Hal ini dapat diilustrasikan oleh grafik berikut ini.



Pendidikan adalah
menyalakan api, bukan
mengisi bejana.
– Socrates –

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)

Bab 3
Matriks

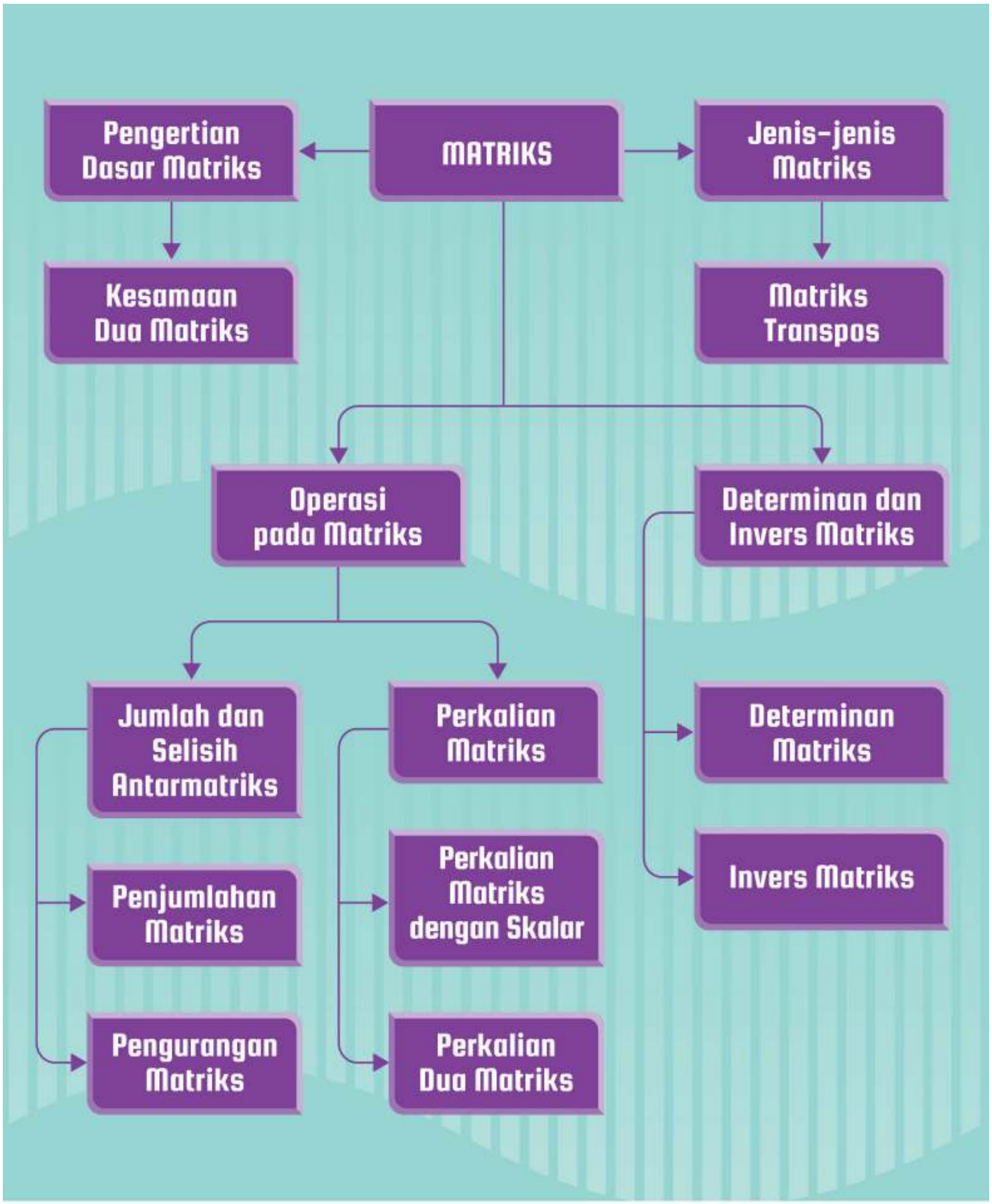


Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Menentukan konsep dari matriks.
2. Mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya.
3. Menentukan matriks transpos.
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.
5. Menjelaskan konsep operasi penjumlahan dan pengurangan dua matriks.
6. Menjelaskan konsep operasi perkalian skalar dengan matriks dan perkalian dua matriks.
7. Menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3.
8. Menentukan invers matriks.
9. Membuat model matematika dan menyelesaikan masalah kontekstual matriks.

A. Peta Konsep



Kata Kunci	Matriks; Matriks Transpos; Kesamaan Dua Matriks; Penjumlahan Matriks; Pengurangan Matriks; Perkalian Matriks; Determinan Matriks; Invers Matriks

B. Gambaran Umum

Pada tingkat SMP/MTs, peserta didik telah mempelajari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV). Selanjutnya di tingkat SMA/MA materi tersebut diperdalam lagi dengan mempelajari sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV). Di bab ini peserta didik akan diajak untuk mengembangkan pengetahuan dan pemahamannya tersebut untuk mempelajari materi matriks. Bab ini dimulai dengan menemukan konsep matriks. Menemukan definisi matriks melalui kegiatan eksplorasi. Kemudian dibimbing untuk menyajikan data atau informasi ke dalam bentuk matriks. Peserta didik memahami unsur-unsur matriks seperti baris, kolom, ordo, dan elemen matriks.

Materi matriks ini juga dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dan permasalahan sehari-hari seperti dalam bidang ekonomi, konstruksi, industri, jaringan komputer, rangkaian listrik, reaksi kimia, dan teknik kriptografi.

Pada subbab B peserta didik diajak untuk memahami jenis-jenis matriks dan matriks transpos. Setelah memahami jenis-jenis matriks, peserta didik berlatih membuat suatu matriks dengan jenis yang sudah ditentukan kemudian peserta didik dapat menentukan transpos dari matriks tersebut.

Peserta didik diarahkan untuk menemukan konsep kesamaan dua matrik pada subbab C. Setelah peserta didik memahami konsep kesamaan dua matriks, peserta didik diharapkan dapat menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks salah satunya adalah menentukan laju aliran pada jaringan komputer.

Penjumlahan dan pengurangan matriks akan dipelajari pada subbab D. Peserta didik diajak menemukan konsep penjumlahan matriks dari masalah kontekstual. Pengurangan matriks dapat diperoleh dari konsep penjumlahan matriks. Selain itu peserta didik diajak menemukan sifat-sifat penjumlahan matriks dan diajak berpikir kritis untuk mengidentifikasi apakah sifat penjumlahan matriks berlaku untuk pengurangan matriks. Kemudian peserta didik diajak menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan penjumlahan dan pengurangan matriks.

Peserta didik mempelajari perkalian matriks pada subbab E. Peserta didik menggunakan konsep penjumlahan berulang pada aljabar untuk menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar. Peserta didik juga dijelaskan tentang sifat-

sifat perkalian matriks dengan skalar. Kemudian menemukan konsep perkalian dua matriks dari masalah kontekstual. Peserta didik diberi penjelasan mengenai sifat-sifat perkalian dua matriks. Setelah mempelajari subbab ini, diharapkan peserta didik dapat menerapkan konsep perkalian matriks dengan skalar dan konsep perkalian dua matriks untuk menyelesaikan masalah kontekstual.

Pada subbab terakhir yaitu subbab F, peserta didik belajar determinan dan invers matriks. Peserta didik mempelajari determinan matriks dengan metode sarrus dan ekspansi kofaktor. Di subbab ini peserta didik belajar invers matriks. Selain itu, peserta didik diajak mempelajari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear tiga variabel menggunakan matriks. Peserta didik diajak menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan determinan dan invers matriks.

C. Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Menemukan konsep matriks	3	1. menyajikan data atau informasi ke dalam bentuk matriks; 2. menentukan pengertian dari matriks; 3. menentukan ordo dan elemen dari suatu matriks.	Konsep matriks	Matriks	1. Eksplorasi 2. Diskusi 3. Ekspositori	Buku Siswa	
Jenis-jenis matriks	2	1. mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya; 2. menentukan matriks transpos.	1. Jenis-jenis matriks 2. Matriks transpos	Matriks Transpos	1. Eksplorasi 2. Diskusi 3. Ekspositori	Buku Siswa	Sukino. (2017). Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib. Jakarta: Erlangga.
Kesamaan dua matriks	3	1. menjelaskan konsep kesamaan dua matriks; 2. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.	Kesamaan Dua Matriks	Kesamaan Dua Matriks	1. Eksplorasi 2. Diskusi 3. Ekspositori	Buku Siswa	Sukino. (2017). Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib. Jakarta: Erlangga.

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Penjumlahan dan pengurangan antarmatriks	7	1. menjelaskan konsep operasi penjumlahan matriks; 2. menentukan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks; 3. menjelaskan konsep operasi pengurangan matriks; 4. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi penjumlahan dan pengurangan antarmatriks.	1. Penjumlahan matriks 2. Pengurangan matriks	1. Penjumlahan matriks 2. Pengurangan matriks	1. Eksplorasi 2. Diskusi 3. Ekspositori	Buku Siswa	https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-Matriks-2014/konten2.html dan Sukino. (2017). Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib. Jakarta: Erlangga.
Kesamaan dua matriks	10	1. menjelaskan konsep perkalian matriks dengan skalar; 2. memahami sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar; 3. menjelaskan konsep perkalian dua matriks; 4. memahami sifat-sifat perkalian dua matriks; 5. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian matriks dengan skalar; 6. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian dua matriks.	1. Perkalian matriks dengan skalar 2. Perkalian dua matriks	Perkalian Matriks	1. Eksplorasi 2. Diskusi 3. Ekspositori	Buku Siswa	https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-Matriks-2014/konten2.html dan Sukino. (2017). Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib. Jakarta: Erlangga.

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Determinan dan invers matriks	10	1. menentukan determinan matriks persegi berordo ; 2. menentukan determinan matriks persegi berordo dengan metode Sarrus; 3. menentukan determinan matriks persegi berordo dengan metode Ekspansi Kofaktor; 4. memahami sifat determinan matriks; 5. menentukan invers matriks; 6. memahami sifat invers matriks; 7. menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) dengan determinan dan invers matriks; 8. menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) dengan determinan matriks.	1. Determinan matriks 2. Invers matriks	1. Determinan matriks 2. Invers matriks	1. Eksplorasi 2. Diskusi 3. Ekspositori	Buku Siswa	Sukino. (2017). Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib. Jakarta: Erlangga.

D. Panduan Pembelajaran Menemukan Konsep Matriks

1. Persiapan Pembelajaran

Tujuan aktivitas pembelajaran ini adalah membimbing peserta didik menemukan konsep matriks. Peserta didik diajak untuk menemukan definisi matriks melalui kegiatan eksplorasi, menyajikan data atau informasi ke dalam bentuk matriks, serta memahami unsur-unsur matriks seperti baris, kolom, ordo, dan elemen matriks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab ini, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan berikut:

1. Menyajikan data atau informasi ke dalam bentuk matriks;
2. Menentukan pengertian dari matriks;
3. Menentukan ordo dan elemen dari suatu matriks.

> **Buku Siswa**
> Menentukan konsep dari matriks.

b. Alat dan Bahan

Alat tulis untuk pembelajaran.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab ini, bapak/ibu guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara memandu peserta didik agar mereka menemukan sendiri konsep matriks?
- Unsur apa saja yang ada pada matriks?
- Kesalahan dan miskonsepsi apa yang kemungkinan akan dilakukan oleh peserta didik ketika menemukan konsep matriks?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Pada kegiatan pemanasan, bapak/ibu guru dapat memberikan motivasi kepada peserta didik tentang pentingnya mempelajari matriks dalam kehidupan. Ajaklah peserta didik untuk memperhatikan informasi yang disajikan pada kegiatan eksplorasi. Kemudian bapak/ibu guru membimbing peserta didik untuk menyajikan informasi tersebut ke dalam bentuk **Tabel 3.1**. Ingatkan kembali tentang unsur-unsur pada tabel yaitu baris tabel dan kolom tabel.

Eksplorasi -Konsep Matriks

Alternatif Penyelesaian

Berikut ini adalah nilai ulangan peserta didik terhadap dua mata pelajaran.

Nama Peserta Didik	Nilai Mata Pelajaran	
	Matematika	Bahasa Inggris
Aisyah	80	75
Alex	70	95
Wayan	95	75

Untuk mendapatkan kesimpulan dari kegiatan pemanasan, bapak/ibu guru dapat meminta dua atau tiga peserta didik untuk menampilkan jawabannya dan menjelaskan yang diketahui tentang unsur-unsur tabel. Berilah penegasan tentang hasil pekerjaan peserta didik, kemudian berikan penjelasan bahwa baris adalah bagian susunan bilangan yang ditulis mendatar atau horizontal dan kolom adalah bagian susunan bilangan yang ditulis tegak atau vertikal.

Aktivitas

Bapak/ibu guru membagi peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan konsep matriks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi "Konsep Matriks". Bapak/ibu guru membimbing dan memberi arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk memecahkan masalah yang diberikan pada kegiatan eksplorasi.

Eksplorasi-Konsep Matriks

Alternatif Penyelesaian

$$A=\begin{pmatrix}80 & 75\\ 70 & 95\\ 95 & 75\end{pmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}80 & 75\\ 70 & 95\\ 95 & 75\end{bmatrix},\ \text{atau}\ A=\begin{Vmatrix}80 & 75\\ 70 & 95\\ 95 & 75\end{Vmatrix}$$

Susunan bilangan pada A berbentuk persegi panjang.

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}, \text{atau}\ B=\begin{Vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{Vmatrix}$$

.

Susunan bilangan pada B berbentuk persegi.

Susunan bilangan yang disusun pada A dan B di atas disebut dengan matriks.

Dari matriks A dan B dapat kita peroleh ciri-ciri yaitu:

- Susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegipanjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom;
- Kelompok bilangan tersebut disusun di dalam kurung biasa “( )”, kurung siku “[ ]”, atau “|| ||”

Antisipasi Miskonsepsi

Miskonsepsi peserta didik menjawab matriks adalah susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegipanjang dan persegi.

Untuk mengatasi miskonsepsi tersebut, guru memberi penegasan bahwa persegi adalah persegipanjang yang keempat sisinya sama panjang.

Untuk memperoleh kesimpulan dari kegiatan eksplorasi, bapak/ibu guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan beri kesempatan peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang matriks dengan tepat. Bapak/ibu guru dapat menggunakan Definisi 3.1 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Berdasarkan simpulan peserta didik mengenai definisi matriks, ajaklah peserta didik untuk memahami notasi matriks, ordo matriks dan elemen matriks. Setelah itu tugaskan peserta didik mencermati **Contoh 3.1**. dan mengerjakan Mari,

Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.1** secara individu di kertas, kemudian kumpulkan sebagai penilaian kuis.

Mari, Mencoba 3.1

Alternatif Penyelesaian

a. Matriks yang terbentuk dari data tersebut adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 & 0 \\ 9 & 10 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Matriks A terdiri atas 4 baris dan 4 kolom matriks, A dikatakan beordo atau berukuran 4 × 4 dan ditulis sebagai $A_{4 \times 4}$.

c. Elemen $a_{23} = 2$ dan $a_{13} = 5$.

Setelah mengerjakan kuis, bapak/ibu guru dapat menggunakan kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan eksplorasi untuk menyelesaikan permasalahan matematis dengan cara kolaborasi mengerjakan bagian Mari, Berkolaborasi yang bersesuaian dengan **Contoh 3.1**. Fitur ini untuk membandingkan jawaban antaranggota kelompok agar memperkaya pemahaman setiap anggota kelompok mengenai konsep matriks.

Mari, Berkolaborasi

Alternatif Penyelesaian

a.

Usia Putra	Kebutuhan Normal (dalam kalori)	Ditambah 1 jam Latihan (dalam kalori)	Ditambah 2 jam Latihan (dalam kalori)
11 – 12	2000	2200	2500
13 – 14	2200	2500	3000
15 – 18	2600	2900	3200
19 – 25	2700	3000	3300

b. Menuliskan kelompok bilangan pada tabel tersebut ke dalam bentuk matriks dengan nama matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} 2000 & 2200 & 2500 \\ 2200 & 2500 & 3000 \\ 2600 & 2900 & 3200 \\ 2700 & 3000 & 3300 \end{bmatrix}$$

c. Matriks A mempunyai 4 baris dan 4 kolom.

d. Elemen-elemen pada baris kedua adalah 2200, 2500, dan 3000.

e. Elemen-elemen pada kolom ketiga adalah 2500, 3000, 3200, dan 3300.

f. $a_{12} = 2200$, $a_{23} = 3000$, dan $a_{33} = 3200$.

g. Setelah peserta didik berdiskusi dengan teman sekelompok, kemungkinan menemukan perbedaan dari perkerjaan masing-masing. Perbedaan yang terjadi karena ada peserta didik yang menyatakan baris secara berturut-turut menunjukkan kebutuhan kalori normal, ditambah 1 jam latihan dan ditambah 2 jam latihan, sedangkan baris secara berturut-turut menunjukkan usia 11 – 12, 13 – 14, 15 – 18, dan 18 – 25. Dengan membandingkan jawaban akan memperkaya pemahaman setiap anggota kelompok mengenai konsep matriks.

Bapak/ibu guru dapat memilih beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan beri kesempatan peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Peran guru dalam mengelola diskusi agar memperoleh jawaban yang tepat.

b. Pendinginan

Pada kegiatan pendinginan, bapak/ibu guru dapat memandu peserta didik untuk mengulas kembali kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan dalam subbab Konsep Matriks dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan berikut.

- Bagaimana cara menyajikan informasi ke dalam tabel?
- Apa yang kalian ingat tentang definisi matriks?
- Bagaimana cara penamaan matriks?
- Apa yang kalian ingat tentang elemen matriks?
- Apa arti dari ordo matriks?

Soal nomor 4 dalam Latihan A dapat bapak/ibu guru gunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik menyelesaikannya.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Konsep Matriks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada buku siswa nomor 1-3.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

1. *Salah*. Matriks adalah susunan bilangan di dalam kurung biasa "( )", kurung siku "[ ]", atau "|| ||" .
2. *Benar*
3. *Benar*
4. a) ordo matriks P 4 × 4

   b) 1, 1, 6, dan −5

   c) $p_{21} = 7$, $p_{33} = 6$, dan $p_{24} = 4$, jadi $-p_{21} + (p_{33} - p_{24})^2 = -7 + (6-4)^2 = -3$,
5. Ada dua alternatif penyelesaian sebagai berikut.

   Alternatif penyelesaian 1

   Peserta didik menyajikan matriks dengan kolom matriks berturut-turut menyatakan jenis hewan ayam, bebek, kambing, dan sapi. Baris matriks berturut-turut menyatakan kandungan lemak, protein, dan kalori.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 28 & 9,2 & 14 \\ 18,2 & 16 & 9,2 & 14 \\ 302 & 326 & 154 & 207 \end{bmatrix}$$

   Ordo matriks A adalah 3 × 4

   Elemen matriks A diperoleh:

   - $a_{11} = 25$
   - $a_{12} = 18,2$
   - $a_{13} = 9,2$
   - $a_{14} = 14$
   - $a_{21} = 18,2$
   - $a_{22} = 16$
   - $a_{23} = 9,2$
   - $a_{24} = 14$
   - $a_{31} = 302$
   - $a_{32} = 326$
   - $a_{33} = 154$
   - $a_{34} = 207$

Alternatif penyelesaian 2

Peserta didik menyajikan matriks dengan kolom matriks berturut-turut menyatakan kandungan lemak, protein, dan kalori. Baris matriks berturut-turut menyatakan jenis hewan ayam, bebek, kambing, dan sapi.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 18,2 & 302 \\ 28 & 16 & 326 \\ 9,2 & 9,2 & 154 \\ 14 & 14 & 207 \end{bmatrix}$$

Ordo matriks A adalah 4 × 3

Elemen matriks A diperoleh:

- a_{11} = 25
- a_{12} = 18,2
- a_{13} = 302
- a_{21} = 28
- a_{22} = 16
- a_{23} = 326
- a_{31} = 9,2
- a_{32} = 9,2
- a_{33} = 154
- a_{41} = 14
- a_{42} = 14
- a_{43} = 207

b. Penugasan

Sebagai penugasan bapak/ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal Latihan A pada nomor 1, 2, 3, dan 5. Soal-soal tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami konsep matriks.

E. Panduan Pembelajaran Jenis-Jenis Matriks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Jenis-Jenis Matriks, peserta didik diajak untuk memahami jenis-jenis matriks dan transpos dari suatu matriks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Jenis-Jenis Matriks, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya;
- menentukan matriks transpos.

Buku Siswa

1. Mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya.
2. Menentukan matriks transpos.

b. Alat dan Bahan

Alat tulis untuk pembelajaran.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Jenis-Jenis Matriks, bapak/ibu guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Unsur apa saja yang diperlukan peserta didik untuk mengidentifikasi jenis-jenis matriks?
- Bagaimana cara bapak/ibu guru memandu peserta didik agar mereka dapat memahami matriks transpos?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/ibu guru dapat memberikan peserta didik pertanyan-pertanyaan berikut ini untuk mengingat kembali materi yang telah dipelajari.

- Jelaskan definisi matriks!
- Apa yang dimaksud ordo matriks?
- Apa yang dimaksud dengan elemen matriks?
- Bagaimana cara menentukan banyak elemen matriks?
- Tuliskan bentuk umum matriks!

Pertanyaan boleh bapak/ibu guru tambahkahkan sendiri. Diskusikan jawaban peserta didik dari pertanyaan tersebut, kemudian bapak/ibu guru dapat memberikan penegasan bahwa pengertian matriks, ordo matriks, dan elemen-elemen matriks sebagai prasyarat untuk mempelajari jenis-jenis matriks dan matriks transpos.

Aktivitas

Bapak/ibu guru dapat memberikan penjelasan kepada peserta didik mengenai jenis-jenis matriks yaitu matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks datar, matriks tegak, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks identitas, matriks nol, dan matriks simetris. Untuk mendapat penalaran terhadap jenis-jenis matriks, berikan kesempatan kepada peserta didik untuk membuat matriks dan menentukan jenis matriks yang dibuat. Setelah peserta didik mendapat penjelasan tentang jenis-jenis matriks, kemudian jelaskan konsep matriks transpos.

Bapak/ibu guru membagi peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Mintalah masing-masing kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan pada fitur mari mengomunikasikan.

Mari, Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

a. Matriks segitiga yang terbentuk dari data pada **Tabel 3.6.** adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 991 & 321 \\ 0 & 375 & 699 \\ 0 & 0 & 2237 \end{bmatrix}$$

dengan baris matriks berturut-turut menyatakan lokasi yang mengalami gagal panen kabupaten Ponorogo, Pacitan, dan Malang.

b. Transpos dari matrik A adalah matriks A^t.

$$A^t = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 991 & 375 & 0 \\ 321 & 699 & 2237 \end{bmatrix}$$

c. Kesimpulan yang diperoleh adalah transpos dari matriks segitiga juga merupakan matriks segitiga. Transpos matriks segitiga atas merupakan matriks segitiga bawah.

Tugaskan peserta didik mencermati **Contoh 3.2**. kemudian ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya dengan mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.2**.

Mari, Mencoba 3.2

Alternatif Penyelesaian

a. Transpos matriks A adalah $A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, jenis matriks A adalah matriks baris

b. Transpos matriks B adalah $B^t = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, jenis matriks B adalah matriks tegak atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi panjang.

c. Transpos matriks C adalah $C^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$, jenis matrik C adalah matriks persegi.

Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang jenis-jenis matriks dan matriks transpos.

b. Pendinginan

Bapak/ibu guru dapat mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut untuk membantu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dilakukan.

- Sebutkan jenis-jenis matriks.
- Jelaskan yang dimaksud dengan matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks datar, matriks tegak, matriks segitiga, matriks diagonal, miatriks identitas, matriks nol, dan matriks simetris!
- Apa yang dimaksud dengan matriks transpos?

Soal yang dapat digunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran yaitu soal nomor 2, 4, dan 6 dalam Latihan B. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik menyelesaikannya.

Refleksi

Mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada buku siswa nomor 4 dan 5.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan B-Jenis-jenis Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. *Benar.*
2. *Salah.* Karena matriks segitiga adalah matriks persegi dengan elemen-elemen matriks yang berada dibawah diagonal utama atau di atas diagonal utama semua bernilai nol.
3. *Salah.* Karena matriks identitas adalah matriks persegi dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya satu dan elemen lain nol. Matriks simetris belum tentu matriks identitas.
4. *Benar*
5. a) matriks A adalah matriks datar atau peserta didik boleh matriks persegi panjang
   b) matrik B adalah matriks segitiga atas atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi.
   c) matriks C adalah matriks diagonal atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi.
6. $A^t = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, jenis matriks A dan jenis matriks A^t adalah matriks simetris.
7. Diketahui $I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, jelas bahwa semua elemen matriks I bernilai nol kecuali elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama. Jadi matriks I disebut dengan matriks diagonal, tetapi matriks diagonal belum tentu dapat disebut matriks identitas..

b. Penugasan

Bapak/ibu guru dapat memberikan tugas kepada peserta didik untuk mengerjakan soal Latihan B pada nomor 1, 3, 5, dan 7. Soal-soal tersebut memfasilitasi peserta

didik untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami jenis-jenis matriks dan matriks transpos.

F. Panduan Pembelajaran Kesamaan Dua Matriks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Kesamaan Dua Matriks, peserta didik dipandu oleh guru untuk menemukan konsep kesamaan dua matriks melalui kegiatan eksplorasi.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Kesamaan Dua Matriks, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- menjelaskan konsep kesamaan dua matriks;
- menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.

Buku Siswa
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.

b. Alat dan Bahan

Alat tulis untuk pembelajaran.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Kesamaan Dua Matriks, bapak/ibu guru dapat mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara memandu peserta didik agar mereka menemukan sendiri konsep kesamaan dua matriks?
- Mengapa kesamaan dua matriks penting untuk dipelajari?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/ibu guru dapat memberikan motivasi kepada peserta didik tentang pentingnya mempelajari kesamaan dua matriks, salah satunya untuk menentukan

laju aliran pada jaringan komputer. Kemudian ingatkan kembali tentang metode penyelesaian sistem persamaan linear khususnya metode eliminasi dan substitusi, kegiatan ini dilakukan untuk memudahkan peserta didik dalam menyelesaikan permasalahan kesamaan dua matriks.

Aktivitas

Bapak/ibu guru membagi peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan konsep kesamaan dua matriks dan menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks. Setelah itu mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi "Kesamaan Dua Matriks".

Eksplorasi Kesamaan Dua Matriks

Alternatif Penyelesaian

Data harga jual kue di Toko A disajikan dalam matriks berikut.

$$A=\begin{bmatrix} 44000 & 71000 & 53000 \\ 38000 & 52000 & 43000 \\ 33000 & 45000 & 38000 \end{bmatrix}$$

Karena Toko B menjual macam kue yang sama dengan toko A, selain itu ukuran dan harganya pun juga sama, maka data harga jual kue di Toko B dapat disajikan sebagai matriks berikut.

$$B=\begin{bmatrix} 44000 & 71000 & 53000 \\ 38000 & 52000 & 43000 \\ 33000 & 45000 & 38000 \end{bmatrix}$$

Matriks A dan matriks B memiliki ordo yang sama yaitu 3×3. Elemen-elemen seletak matriks A dan B mempunyai nilai yang sama.

Kesimpulan yang didapatkan adalah dua buah matriks dikatakan sama jika elemen-elemen seletak dari dua matriks yang berordo sama mempunyai nilai sama.

Bapak/ibu guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan berilah kesempatan peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Bapak/ibu guru memastikan bahwa peserta didik dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang kesamaan dua matriks. Gunakan Definisi 3.2 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik.

Berdasarkan simpulan peserta didik mengenai definisi kesamaan dua matriks, ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai kesamaan dua matriks dengan mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.3** secara mandiri.

Mari, Mencoba 3.3

Alternatif Penyelesaian

- Matriks A dan B berordo sama yaitu 2×2 berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.
- Syarat kedua kesamaan matriks A dan B adalah semua elemen-elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama, sehingga diperoleh
  - $7 = 7c$, maka $c = 1$
  - karena $-b - 3 = -5c$ dan $c = 1$, maka $b = 2$
  - karena $b + 3 = 3a - 1$ dan $b = 2$, maka $a = 2$
  - karena $d - 5 = 2a + 1$ dan $a = 2$, maka $d = 10$

  Jadi nilai $a + b + c + d = 2 + 2 + 1 + 10 = 15$.

Tunjuklah beberapa peserta didik untuk mempresentasikan jawaban. Bapak/ibu guru perlu memberikan konfirmasi terhadap jawaban peserta didik.

b. Pendinginan

Di akhir kegiatan pembelajaran, bapak/ibu guru dapat mengajak peserta didik bersama-sama untuk mengulas pembelajaran yang telah dilakukan dengan mengajukan pertanyaan "Apa yang kalian ingat tentang kesamaan dua matriks?". Selanjutnya, berikut ini soal yang bapak/ibu guru bisa digunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran yaitu soal nomor 1, 2, 3, dan 4 dalam Latihan C. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik menyelesaikannya.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Kesamaan Dua Matriks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada buku siswa nomor 6 dan 7.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan C-Kesamaan Dua Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. *Benar.*
2. *Benar.*
3. *Salah.* Ordo matriks R dan C tidak sama.
4. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -x-3y & 0 \\ (x-2y)^2 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan $A = I$.

   Matriks A dan I berordo sama yaitu 2×2 berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi. Syarat kedua kesamaan matriks A dan I adalah semua elemen-elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama, sehingga diperoleh persamaan.

   $-x - 3y = 1$ persamaan 1

   $(-x - 3y)^2 = 0$ persamaan 2

   $-x - 3y = 1$ maka $x = -3y - 1$. Substitutiskan $x = -3y - 1$ ke persamaan 2 diperoleh nilai $y = -\frac{1}{6}$. Kemudian subtitusikan nilai y ke $x = -3y - 1$ diperoleh $x = -\frac{1}{2}$. Jadi nilai $x + y = -\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

5. Matriks berordo sama yaitu 2×2 berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi. Syarat kedua semua elemen-elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama, sehingga diperoleh persamaan.

   $a + 2b = 3$ persamaan 1

   $2a + b = -3$ persamaan 2

   $c + d = 7$ persamaan 3

   $2c + d = 1$ persamaan 4

   Untuk memperoleh nilai a dan b maka kita dapat menggunakan metode eliminasi substitusi persamaan 1 dan 2. Untuk mengeliminasi variabel a, maka kalikan persamaan ke 1 dengan 2, kemudian kurangkan kedua persamaan tersebut.

   $$\begin{array}{l|c|l} a + 2b = 3 & \times 2 & 2a + 4b = 6 \\ 2a + b = -3 & \times 1 & 2a + b = -3 \quad - \\ \hline & & \quad 3b = 9 \\ & & \quad\; b = 3 \end{array}$$

   Substitusikan nilai b ke persamaan ke 1, maka diperoleh $a = -3$.

Untuk memperoleh nilai c dan d maka kita dapat menggunakan metode eliminasi substitusi persamaan 3 dan 4. Untuk mengeliminasi variabel d, maka kurangkan kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{r} c + d = 7 \\ 2c + d = 1 \\ \hline -c = 6 \\ c = -6 \end{array} -$$

Substitusikan nilai c ke persamaan ke 3, maka diperoleh $d = 13$.

Jadi nilai $a + b + c + d = -3 + 3 + (-6) + 13 = 7$.

6. Diketahui matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + 10 \\ x_2 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Matriks berordo sama yaitu 4 × 1 berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi. Syarat kedua semua elemen-elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama, sehingga untuk menentukan laju aliran x_1, x_2, dan x_3 diperoleh.

- $x_3 + 10 = 45$ maka $x_3 = 35$
- $x_1 + 10 = 55$ maka $x_1 = 45$
- karena $x_1 + x_2 = 40$ dan $x_1 = 45$ maka $x_2 = -5$

laju aliran $x_1 = 45$, $x_2 = -5$, dan $x_3 = 35$. Laju aliran x_2 bernilai negatif berarti arah gambar pada soal tidak benar, seharusnya arah aliran x_2 ke simpul ke node A.

b. Penugasan

Sebagai penugasan, bapak/ibu guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan soal Latihan C pada nomor 5 dan 6. Soal-soal tersebut diharapkan dapat memfasilitasi peserta didik mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami materi kesamaan dua matriks.

G. Panduan Pembelajaran Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks dibagi menjadi tiga aktivitas pembelajaran. Tujuan aktivitas pertama peserta didik dipandu oleh bapak/ibu guru untuk menemukan konsep penjumlahan matriks. Di aktivitas kedua, peserta didik diminta untuk menemukan sifat-sifat penjumlahan matriks. Di aktivitas ketiga, peserta didik diajak untuk memahami pengurangan matriks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Penjumlahan dan Pengurangan Matriks, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan berikut:

1. menjelaskan konsep operasi penjumlahan matriks;
2. menentukan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks;
3. menjelaskan konsep operasi pengurangan matriks;
4. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi penjumlahan dan pengurangan antarmatriks.

Buku Siswa
Menjelaskan konsep operasi penjumlahan dan pengurangan dua matriks.

b. Alat dan Bahan

Kalkulator matriks.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks, bapak/ibu guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara memandu peserta didik agar mereka menemukan konsep penjumlahan matriks?
- Apa saja yang diperlukan oleh peserta didik untuk menemukan sifat-sifat penjumlahan matriks?

- Apa saja yang diperlukan oleh peserta didik untuk memahami pengurangan matriks?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Sebagai motivasi, bapak ibu guru dapat menjelaskan kepada peserta didik tentang pentingnya mempelajari penjumlahan matriks dalam kehidupan. Ajaklah peserta didik untuk memperhatikan informasi yang disajikan pada kolom matematika dalam budaya. Bapak/ibu guru diperbolehkan mengganti dengan motif batik yang dikenal di daerah masing-masing.

Aktivitas 1

Bapak/ibu guru membagi peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan konsep penjumlahan matriks. Setelah itu mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Bapak/ibu guru pastikan setiap anggota kelompok dapat bekerjasama dalam merumuskan konsep penjumlahan matriks. Pembentukan kelompok dapat bapak/ibu guru lakukan untuk aktivitas-aktivitas selanjutnya pada subbab ini.

Eksplorasi Penjumlahan Matriks

Alternatif Penyelesaian

a. Misalkan data biaya bahan dasar menjadi matriks A dan biaya tenaga kerja menjadi matriks B

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 45 & 82 \\ 16 & 32 & 60 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 15 \\ 6 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

b. Biaya produksi dinyatakan ke dalam matriks dengan menjumlahkan matriks A matriks B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 23 & 45 & 82 \\ 16 & 32 & 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 & 15 \\ 6 & 8 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23+8 & 45+10 & 82+15 \\ 16+6 & 32+32 & 60+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 55 & 97 \\ 22 & 40 & 74 \end{bmatrix}$$

c. Interpretasi setiap elemen matriks biaya produksi adalah sebagai berikut.

- Biaya produksi batik handprint kualitas I = Rp31.000.000,00
- Biaya produksi batik cap kualitas I = Rp55.000.000,00
- Biaya produkdi batik tulis kualitas I = Rp97.000.000,00

- Biaya produksi batik handprint kualiatas II = Rp22.000.000,00
- Biaya produksi batik cap kualitas II = Rp40.000.000,00
- Biaya produksi batik tulis kualitas II = Rp74.000.000,00

d. Apabila pada matriks biaya bahan dasar data batik tulis dihapus, maka matriks biaya produksi tidak dapat dihitung. Karena data biaya tenaga kerja tidak dapat dijumlahkan.

Kesimpulan penjumlahan kedua matriks dapat dilakukan karena dua matriks memiliki ordo yang sama, apabila ordo berbeda operasi penjumlahan matriks tidak dapat dilakukan. Operasi penjumlahan matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dan elemen-elemen matriks B yang seletak.

Mintalah beberapa kelompok untuk berbagi hasil diskusinya dan beri kesempatan peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang penjumlahan matriks dengan tepat. Gunakan Definisi 3.3 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Bapak/ibu guru dapat menugaskan peserta didik mencermati **Contoh 3.4**. Kemudian, ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai penjumlahan matriks dengan mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.4**.

Mari, Mencoba 3.4

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2+7 & 1+0 \\ 3+3 & 6+7 & 9+1 \\ 2+5 & 5+(-6) & -7+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 6 & 13 & 10 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aktivitas 2

Tujuan dari aktivitas kedua adalah untuk mengajak peserta didik menemukan sifat-sifat penjumlahan matriks. Bapak/ibu guru mengajak masing-masing kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi "Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks".

Eksplorasi-Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

Alternatif Penyelesaian

a. $A+B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2 & 1+(-3)\\ 1+1 & 3+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$B+A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+4 & -3+1\\ 1+1 & -1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

Karena matriks $A + B$ sama dengan matriks $B + A$ jadi penjumlahan matriks bersifat komutatif.

b. $(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

$A+(B+C)=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

Karena matriks $(A+B)+C$ sama dengan matriks $A+(B+C)$, jadi penjumlahan matriks bersifat asosiatif.

c. $A+O=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0 & 1+0\\ 1+0 & 3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$O+A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+4 & 0+1\\ 0+1 & 0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

Karena matriks $A+O=O+A=A$, jadi penjumlahan matriks bersifat identitas.

d. $A+(-A)=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+(-4) & 1+(-1)\\ 1+(-1) & 3+(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Karena hasil penjumlahan matriks A dan lawan dari matriks A adalah matriks nol, jadi penjumlahan matriks bersifat $A+(-A)=O$.

Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang sifat-sifat penjumlahan matriks dengan tepat. Gunakan Sifat 3.1 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Aktivitas 3

Bapak/ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik bahwa rumusan penjumlahan matriks dapat diterapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks. Kemudian jelaskan Definisi 3.4.

Untuk menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai pengurangan matriks bapak/ibu guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.5 dan 3.6**.

Mari, Mencoba 3.5

Alternatif Penyelesaian

$$-Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P - Q &= P + (-Q) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+3 & 0+1 & 3+(-3) \\ 1+(-4) & -2+(-2) & -5+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mari, Mencoba 3.6

Alternatif Penyelesaian

Karena $X + P = Q$, maka $X = Q - P$.

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-(-7) & -3-1 & 4-9 \\ 1-3 & 2-0 & 2-(-1) \\ 5-1 & -5-0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks X yang memenuhi $X + P = Q$ adalah $X = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

Selain kegiatan Mari, Mencoba, bapak ibu guru dapat menggunakan fitur Mari, Berpikir Kritis. Fitur ini dapat mengajak peserta didik untuk melakukan penalaran dalam menyelesaikan masalah, sehingga tercipta pemahaman yang komprehensif tentang pengurangan matriks.

Mari Berpikir Kritis

Pengurangan Matriks

Alternatif Penyelesaian

Misalkan matriks-matriks

$$A=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&-3\\1&-1\end{bmatrix}, \text{dan } C=\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

- $A-B=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-3\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-2&1-(-3)\\1-1&3-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\0&4\end{bmatrix}$
- $B-A=\begin{bmatrix}2&-3\\1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-4&-3-1\\1-1&-1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-4\\0&-4\end{bmatrix}$

Karena matriks $A-B$ tidak sama dengan matriks $B-A$, jadi sifat komutatif tidak berlaku untuk pengurangan matriks.

- $(A-B)-C=\left(\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-3\\1&-1\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&5\end{bmatrix}$
- $A-(B-C)=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}2&-3\\1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&-4\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5\\2&3\end{bmatrix}$

Karena matriks $(A-B)-C$ tidak sama dengan matriks $A+(B+C)$, jadi sifat asosiatif tidak berlaku untuk pengurangan matriks.

- $A-O=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-0&1-0\\1-0&3-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}$
- $O-A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-4&0-1\\0-1&0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-1\\-1&-3\end{bmatrix}$

Karena matriks $A-O\neq O-A$, jadi pengurangan matriks tidak bersifat identitas.

- Jika matriks D merupakan lawan dari matriks A, maka

  $A-D=\begin{bmatrix}4&1\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4&-1\\-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-(-4)&1-(-1)\\1-(-1)&3-(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&2\\2&6\end{bmatrix}$

Hasil pengurangan matriks A dan lawan dari matriks A adalah bukan matriks nol.

Kesimpulan yang diperoleh adalah sifat-sifat operasi penjumlahan matriks pada sifat 3.1 tidak berlaku pada operasi pengurangan matriks.

Mintalah beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan beri kesempatan peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang pengurangan matriks dengan tepat.

b. Pendinginan

Pada kegiatan pendinginan, bapak/ibu guru dapat mengulas kembali kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan dalam subbab penjumlahan dan pengurangan antarmatriks dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Apa yang kalian ingat tentang definisi penjumlahan matriks?
- Apa saja sifat-sifat penjumlahan matriks?
- Apa yang kalian ingat tentang definisi pengurangan matriks?
- Apakah sifat-sifat penjumlahan matriks berlaku pada pengurangan matriks?

Selanjutnya, berikut ini soal yang bisa digunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran yaitu soal nomor 1, 2, 3, dan 4 dalam Latihan D. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada buku siswa nomor 8–11.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan D Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

Alternatif Penyelesaian

1. *Salah*. Operasi penjumlahan matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dan elemen-elemen matriks B yang seletak.
2. *Benar*.
3. *Salah*. Dua buah matriks dapat dijumlahkan apabila matriks tersebut memiliki ordo yang sama.

4.
$$A - B = \begin{bmatrix} {}^3\log 27 & 0 \\ 0 & {}^7\log 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^3\log 81 & 1 \\ -1 & {}^7\log 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} {}^3\log 27 - {}^3\log 81 & 0 - 1 \\ 0 - (-1) & {}^7\log 21 - {}^7\log 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks $A - B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5.
$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ 3z & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -x \\ 2y & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = O$$
$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ 3z & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -x \\ 2y & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2x - 4 & y + x + 1 \\ 3z - 2y - 9 & z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan berikut.

$2x - 4 = 0$ persamaan 1

$y + x + 1 = 0$ persamaan 2

$3z - 2y - 9 = 0$ persamaan 3

$z - 1 = 0$ persamaan 4

- Persamaan pertama $2x - 4 = 0$ maka $x = 2$.
- Substitusikan nilai x ke persamaan kedua, diperoleh nilai $y = -3$.
- Persamaan keempat $z - 1 = 0$ maka $z = 1$.

b. Penugasan

Sebagai penugasan, bapak/ibu guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan soal **Latihan D** pada nomor 5. Soal tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami materi penjumlahan dan pengurangan antarmatriks.

H. Panduan Pembelajaran Perkalian Matriks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Perkalian Matriks dibagi menjadi dua aktivitas pembelajaran. Pada aktivitas pertama peserta didik dipandu oleh bapak/

ibu guru untuk menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar. Di aktivitas kedua, mengajak peserta didik menemukan konsep perkalian dua matriks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Perkalian Matriks, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan-kemampuan berikut:

1. menjelaskan konsep perkalian matriks dengan skalar;
2. memahami sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar;
3. menjelaskan konsep perkalian dua matriks;
4. memahami sifat-sifat perkalian dua matriks;
5. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian matriks dengan skalar; dan
6. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian dua matriks.

> **Buku Siswa**
> Menjelaskan konsep operasi perkalian skalar dengan matriks dan perkalian dua matriks.

b. Alat dan Bahan

Kalkulator matriks.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Perkalian Matriks, bapak/ibu guru dapat mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara memandu peserta didik agar mereka menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar?
- Bagaimana cara memandu peserta didik agar mereka menemukan konsep perkalian dua matrik?
- Apa saja sifat perkalian matriks dengan skalar dan sifat perkalian dua matriks?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/ibu guru dapat memberikan motivasi kepada peserta didik tentang pentingnya mempelajari perkalian matriks. salah satunya permasalahan perkalian matriks pada bidang konstruksi yang ada pada buku siswa. Bapak ibu guru juga dapat memotivasi peserta didik pentingnya mempelajari subbab ini dengan menampilkan permasalahan-permasalahan yang berkaitan dengan perkalian matriks. Berikan peserta didik pertanyan-pertanyaan berikut ini untuk mengingat kembali materi yang telah dipelajari.

- Apa yang dimaksud dengan penjumlahan berulang aljabar?
- Apa yang dimaksud dengan penjumlahan matriks?

Bapak/ibu guru dapat menambahkan pertanyaan sendiri. Diskusikan jawaban peserta didik dari pertanyaan tersebut, kemudian bapak/ibu guru dapat memberikan penegasan bahwa konsep penjumlahan berulang aljabar dan materi penjumlahan matriks sebagai prasyarat untuk mempelajari perkalian matriks dengan skalar.

Alternatif Pembelajaran

Sebagai alternatif pembelajaran, bapak/ibu guru dapat menggunakan tautan berikut untuk membantu peserta didik mengingat kembali materi operasi penjumlahan matriks. Tautan *https://s.id/PenjumlahanMatriks*

Aktivitas 1

Bapak/ibu guru mengajak peserta didik untuk membentuk kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar. Setelah itu mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi "Perkalian Matriks dengan Skalar". Bapak/ibu guru pastikan setiap anggota kelompok dapat bekerjasama dalam merumuskan konsep perkalian

matriks dengan skalar. Pembentukan kelompok dapat bapak/ibu guru lakukan untuk aktivitas selanjutnya pada subbab ini.

Eksplorasi-Perkalian Matriks dengan Skalar
Alternatif Penyelesaian

Dengan aturan penjumlahan matriks dapat diperoleh

$$A+A=\begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+9&7+7\\3+3&1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 9&2\times 7\\2\times 3&2\times 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}=2A$$

$$\begin{aligned}A+A+A &= \begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}9+9+9&7+7+7\\3+3+3&1+1+1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3\times 9&3\times 7\\3\times 3&3\times 1\end{bmatrix}\\ &= 3\begin{bmatrix}9&7\\3&1\end{bmatrix}\\ &= 3A\end{aligned}$$

Apabila penjumlahan matriks A sampai k kali maka diperoleh

$$\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{k\text{ kali penjumlahan matriks A}}=kA$$

Dari langkah-langkah tersebut, perkalian matriks dengan skalar dapat diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada matriks A dengan k.

Untuk memperoleh simpulan, bapak/ibu guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan beri kesempatan peserta didik lain untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang perkalian matriks dengan skalar dengan tepat. Gunakan Definisi 3.6 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Bapak/ibu guru dapat menugaskan peserta didik mencermati **Contoh 3.7**. kemudian, ajaklah peserta didik mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.7** secara individu di kertas, kemudian kumpulkan sebagai penilaian kuis.

Mari, Mencoba 3.7

Alternatif Penyelesaian

$$kQ = 4\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 2 & 4 \times \frac{1}{4} & 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 4 \times 1 & 4 \times \frac{1}{2} & 4 \times \frac{3}{4} \\ 4 \times 3 & 4 \times 8 & 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 12 & 32 & 4 \end{bmatrix}$$

Bapak/ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar pada kolom Sifat 3.1 di buku siswa.

Aktivitas 2

Bapak/ibu guru mengajak setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi.

Eksplorasi-Perkalian Dua Matriks

Alternatif Penyelesaian

Misalkan data banyak karyawan menjadi matriks A dan besar gaji karyawan (dalam ribu rupiah) menjadi matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} 450 & 120 \\ 380 & 140 \\ 420 & 87 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 125 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Dana yang harus dikeluarkan perusahaan tersebut dinyatakan ke dalam matriks dengan mengkalikan matriks A dengan matriks B.

$$AB = \begin{bmatrix} 450 & 120 \\ 380 & 140 \\ 420 & 87 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 125 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \times 125 + 120 \times 80 \\ 380 \times 125 + 140 \times 80 \\ 420 \times 125 + 87 \times 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65850 \\ 58700 \\ 59460 \end{bmatrix}$$

a. Interpretasi dari hasil perkalian dua matriks diperoleh dana yang harus dikeluarkan perusahaan di setiap hari pada masing-masing lokasi adalah sebagai berikut.
   - Dana untuk lokasi Kota Pontianak sebesar Rp65.850.000,00.
   - Dana untuk lokasi Kota Surabaya sebesar Rp58.700.000,00.
   - Dana untuk lokasi Kota Makasar sebesar Rp59.460.000,00.

b. Matriks A berordo 3×2, matriks B berordo 2×1, dan ordo matriks **AB** adalah 3×1. Perkalian matriks A dengan matriks B dapat dilakukan apabila banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. Hasil perkalian matriks A dengan matriks B adalah sebuah matriks yang mempunyai banyak baris sama dengan matriks A dan banyak kolom sama dengan matriks B.

c. Apabila salah satu kolom pada matriks A dihilangkan, maka perkalian matriks A dengan matriks B tidak dapat dilakukan. Hal ini terjadi karena terdapat elemen baris matriks B yang tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom pada matriks A.

d. Dari permasalahan tersebut, simpulan yang dapat di peroleh adalah jika matriks A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times p$, hasil matriks AB berordo $m \times p$. Perkalian matriks A dengan matriks B dapat dilakukan apabila banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. Elemen-elemen pada matrisk AB dapat diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i pada matriks A terhadap elemen kolom ke-j pada matriks B, kemudian ditambahkan hasilnya. Elemen-elemen baris pada matriks A berkorespondensi satu-satu elemen-elemen kolom pada matriks B.

Bapak/ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban dari kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang perkalian dua matriks dengan tepat. Gunakan Definisi 3.7 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Bapak/ibu guru dapat menugaskan peserta didik mencermati **Contoh 3.8**. Ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai penjumlahan matriks dengan mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.8**.

Mari, Mencoba 3.8

Alternatif Penyelesaian

Matriks CD tidak terdefinisi karena banyak kolom pada matriks C tidak sama dengan banyak baris pada matriks D.

$$DC = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 1+(-4)\times 1 & 1\times(-3)+(-4)\times 2 & 1\times 3+(-4)\times 2 \\ 8\times 1+2\times 1 & 8\times(-3)+2\times 2 & 8\times 3+2\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -11 & -5 \\ 10 & -20 & 28 \end{bmatrix}$$

Selain kegiatan Mari, Mencoba, bapak ibu guru juga dapat menggunakan fitur Mari, Berpikir Kritis untuk peserta didik melakukan penalaran dalam menyelesaikan masalah, sehingga tercipta pemahaman yang komprehensif tentang perkalian dua matriks.

Mari, Berpikir Kritis

Pengurangan Matriks

Alternatif Penyelesaian

a. $PQ = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 20 \\ 25 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 30000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\times 20000+12\times 15000+20\times 30000 \\ 25\times 20000+10\times 15000+15\times 30000 \\ 15\times 20000+15\times 15000+20\times 30000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1080000 \\ 1100000 \\ 1125000 \end{bmatrix}$

b. Matriks PQ bukan merupakan matriks pendapatan untuk masing-masing tempat. Solusi agar menemukan matriks pendapatan untuk masing-masing toko adalah menentukan matriks P^tQ, dengan P^t merupakatan transpos dari matriks P.

$$P^t = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 15 \\ 12 & 10 & 15 \\ 20 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$P^tQ = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 15 \\ 12 & 10 & 15 \\ 20 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 30000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\times 20000+25\times 15000+15\times 30000 \\ 12\times 20000+10\times 15000+15\times 30000 \\ 20\times 20000+15\times 15000+20\times 30000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1125000 \\ 840000 \\ 1225000 \end{bmatrix}$$

Interpretasi dari matriks P^tQ adalah sebagai berikut.

- pendapatan dari hasil penjualan kripik tempat A adalah Rp1.125.000,00;

- pendapatan dari hasil penjualan kripik tempat B adalah Rp840.000,00;
- pendapatan dari hasil penjualan kripik tempat C adalah Rp1.225.000,00;

Bapak/ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang sifat-sifat perkalian dua matriks pada kolom Sifat 3.3 di buku siswa, kemudian ajaklah peserta didik berdiskusi tentang permasalahan yang ada pada fitur Mari, Berpikir Kritis yang bersesuaian dengan Sifat 3.3.

Mari, Berpikir Kritis

Pengurangan Matriks

Alternatif Penyelesaian

Dari contoh 3.7 dapat diperoleh bahwa perkalian matriks tidak bersifat komutatif, tetapi pernyataan ini tidak berlaku untuk:

- $AI = IA = A$, I merupakan matriks identitas berordo sama dengan matriks persegi A.
- $AO = OA = O$, O merupakan matriks nol berordo sama dengan matriks persegi A.

Selanjutnya, berikut ini soal yang bisa digunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran yaitu soal nomor 1 dan 5 dalam Latihan E. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik menyelesaikannya.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Perkalian Matriks, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada buku siswa nomor 12-17.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan E-Perkalian Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. *Benar.*
2. *Benar.*
3. *Salah.* Ada, A adalah matriks identitas.

4. Karena $P - 2X = 3Q$, maka $X = -\frac{3}{2}Q + \frac{1}{2}P$.

$$X = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} x-2 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4x+17 & 9y+9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $-4x + 17 = -3$ maka $x = 5$

Karena $9x + 9 = -9$ maka $y = -2$

Jadi nilai $x + y = 5 + (-2) = 3$.

6. matriks besarnya bunga $= 6\% \times \begin{bmatrix} 2.000.000 \\ 3.500.000 \\ 4.000.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\% \times 2.000.000 \\ 6\% \times 3.500.000 \\ 6\% \times 4.000.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.000 \\ 210.000 \\ 240.000 \end{bmatrix}$

jadi matriks besarnya bunga tabungan mereka (dalam rupiah) $\begin{bmatrix} 120.000 \\ 210.000 \\ 240.000 \end{bmatrix}$.

7. Diketahui matriks banyaknya kue adalah $\begin{bmatrix} 23 & 22 & 17 \\ 27 & 20 & 16 \end{bmatrix}$.

Matriks harga kue adalah $\begin{bmatrix} 40000 \\ 30000 \\ 27000 \end{bmatrix}$.

Matriks pendapatan merupakan perkalian dari matriks banyak kue dan matriks harga kue.

$$\begin{bmatrix} 23 & 22 & 17 \\ 27 & 20 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40000 \\ 30000 \\ 27000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \times 40000 + 22 \times 30000 + 17 \times 27000 \\ 27 \times 40000 + 20 \times 30000 + 16 \times 27000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2039000 \\ 2112000 \end{bmatrix}$$

Jadi pendapatan di cabang Yogyakarta adalah Rp2.039.000,00 dan pendapatan di cabang Jakarta adalah Rp2.112.000,00.

b. Penugasan

Sebagai penugasan, bapak/ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal Latihan E pada nomor 2, 3, 4, 6, dan 7. Soal-soal tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami

materi perkalian matriks. Selain itu, bapak/ibu guru dapat menggunakan fitur Mari, Berpikir Kreatif sebagai penugasan. Soal pada fitur tersebut merupakan soal keterkaitan bilangan kompleks dan operasi matriks. setelah mengerjakan diharapkan pemahaman peserta didik tentang perkalian matriks menjadi luas.

Mari Berpikir Kreatif

Alternatif Penyelesaian

Jika diketahui $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ dan $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i$, dengan menggunakan operasi penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar maka:

a. $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a_1 + ib_1$ (terbukti)

b. $\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a_2 + ib_2$ (terbukti)

dengan menggunakan $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 + ib_1$ dan $\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_2 + ib_2$, maka:

- $$\begin{aligned} (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_1 + a_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (b_1 + b_2)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$ (terbukti)

- $$\begin{aligned} (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (a_1b_2 + a_2b_1)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$ (terbukti)

I. Panduan Pembelajaran Determinan dan Invers Matriks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Determinan dan Invers Matriks dibagi menjadi dua aktivitas pembelajaran. Pada aktivitas pertama peserta didik dipandu oleh bapak/ibu guru untuk memahami konsep determinan matriks berorodo 2×2, penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dengan determinan matriks, determinan matriks berorodo 3×3 dengan metode sarrus dan metode ekspansi kofaktor, penyesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) dengan determinan matriks, dan menemukan sifat determinan matriks. Di aktivitas kedua, peserta didik dipandu oleh bapak/ibu guru untuk memahami invers matriks, serta menemukan sifat invers matriks.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Determinan dan Invers Matriks, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan-kemampuan berikut

1. menentukan determinan matriks persegi berordo 2×2;
2. menentukan determinan matriks persegi berordo 3×3 dengan metode Sarrus;
3. menentukan determinan matriks persegi berordo 3×3 dengan metode Ekspansi Kofaktor;
4. memahami sifat determinan matriks;
5. menentukan invers matriks;
6. memahami sifat invers matriks;
7. menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) dengan determinan dan invers matriks;
8. menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) dengan determinan.

Buku Siswa

- Menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3
- Menentukan invers matriks.

b. Alat dan Bahan

Kalkulator Matriks.

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Determinan dan Invers Matriks, bapak/ibu guru dapat menggunakan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara menjelaskan konsep determinan matriks?
- Bagaimana cara menjelaskan konsep invers matriks?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Berikan motivasi kepada peserta didik tentang pentingnya mempelajari determinan dan invers matriks. Salah satunya untuk menentukan penyelesaian dari permasalahan sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel. Bapak/ibu guru dapat memandu peserta didik untuk mengingat kembali penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel menggunakan metode eliminasi. Bimbinglah peserta didik untuk menuliskan langkah penyelesaian sistem persamaan linear $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ menggunakan metode eliminasi. Selain itu, bapak/ibu guru dapat mengingatkan kembali peserta didik tentang materi perkalian dua matriks.

Aktivitas 1

Bapak/ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik bahwa penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel ada kaitannya dengan konsep determinan matriks berordo 2 × 2, kemudian jelaskan definsi 3.8. Selanjutnya berikan penjelasan kepada peserta didik bahwa sistem persamaan linear dapat disajikan ke dalam bentuk matriks dengan menggunakan konsep perkalian dua matriks. Ajaklah peserta didik memahami penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel menggunakan determinan matriks dan mencermati **Contoh 3.9**.

Bapak/ibu guru dapat mengajak peserta didik untuk membentuk kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Setelah itu

mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan soal pada Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.9**.

Mari, Mencoba 3.9

Alternatif Penyelesaian

1. $\det M = \begin{vmatrix} 9 & x \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 9 \times (-7) - 8x = -63 - 8x$. Karena det $M = 9$, diperoleh

   $-63 - 8x = 9$

   $-8x = 72$

   $x = -9$

   Jadi nilai $x = -9$.

2. Bentuk matriks dari SPLDV di atas adalah $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$.

   Nilai x dan y adalah sebagai berikut.

   $$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(8 \times 3) - (-10 \times (-1))}{(2 \times 3) - (1 \times (-1))} = \frac{24 - 10}{6 + 1} = \frac{14}{7} = 2$$

   $$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(2 \times (-10)) - (1 \times 8)}{(2 \times 3) - (1 \times (-1))} = \frac{-20 - 8}{6 + 1} = \frac{-28}{7} = -4$$

   Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$ adalah himpunan yang memuat pasangan berurutan (2,–4).

Bapak/Ibu Guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang menentukan determinan matriks ordo 3×3 menggunakan metode sarrus dan metode ekspansi kofaktor serta penjelasan tentang menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel menggunakan determinan matriks. kemudian ajaklah peserta didik mengerjakan soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.10**.

Mari, Mencoba 3.10

Alternatif Penyelesaian

a. Determinan matriks R dengan Metode Sarrus.

$$\begin{matrix} & (6)\ (-2)\ (-8) \\ |R| = & \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ & (-1)\ (-8)\ (-12) \end{matrix}$$

$= -1 + (-8) + (-12) - (-6) - 2 - 8 = -25$

b. Determinan matriks P dengan Metode Ekspansi Kofaktor kolom ketiga.

$$|R| = 3\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 3(-4\times1-(2\times(-1))-2(1\times1-(2\times(-2))+1(1\times(-1)-(-4\times(-2))$

$= -25$

Setelah mengerjakan soal di atas, ajaklah masing-masing kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi.

Eksplorasi-Sifat Determinan Matriks

Alternatif Penyelesaian

a. $|A| = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5\times(-3) - 1\times2 = 15 - 2 = 13$

$|B| = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9\times(-1) - 1\times(-4) = -9 + 4 = -5$

$AB = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5(9)+2(1) & -5(-4)+2(-1) \\ 1(9)+(-3)(1) & 1(-4)+(-3)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 & 18 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

b. $|A||B| = 13\times(-5) = -65$

$|AB| = \begin{vmatrix} -43 & 18 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -43\times(-1) - 6\times18 = -65$

Determinan matriks bersifat $|A||B| = |AB|$

Pandulah diskusi ini agar dapat memperoleh jawaban yang benar dari soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **contoh 3.9** dan **3.10** serta menyimpulkan

yang peserta didik ketahui tentang sifat determinan matriks dengan tepat. Gunakan Sifat 3.4 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Aktivitas 2

Bapak/Ibu Guru berilah penjelasan kepada peserta didik tentang invers matriks berordo 2 × 2 dan 3 × 3, kemudian mintalah peserta didik mencermati **Contoh 3.11**. Kemudian ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai invers matriks dengan meminta masing-masing kelompok untuk berdiskusi mengerjakan soal pada bagian Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan **Contoh 3.11**.

Mari, Mencoba 3.11

Alternatif Penyelesaian

$|X| = 1(4) - (-1)(-3) = 4 - 3 = 1$

$|Y| = -4(-2) - (3)(2) = 8 - 6 = 2$

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|} Adjoin(X) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{|Y|} Adjoin(Y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} + Y^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi $X^{-1} + Y^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$|X + Y| = -3(2) - (2)(-1) = -6 + 2 = -4$

$$(X + Y)^{-1} = \frac{1}{|X + Y|} Adjoin(X + Y) = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Jadi matriks $X^{-1} + Y^{-1}$ tidak sama dengan matriks $(X + Y)^{-1}$.

Selanjutnya, bapak/ibu guru mengajak setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi.

Eksplorasi-Sifat Invers Matriks

Alternatif Penyelesaian

Diketahui sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$

Misalkan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ maka diperoleh sistem persamaan linear $AX = B$ dapat ditentukan penyelesaiannya dengan $X = A^{-1}B$.

Antisipasi Miskonsepsi

Miskonsepsi peserta didik yaitu pada bagian ii, peserta didik menjawab $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$ hal ini menyebabnya operasi perkalian matriks tidak dapat dilakukan. Untuk mengatasi miskonsepsi tersebut guru memberi penegasan bahwa ketika mengkalikan kedua ruas dengan $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$ maka peserta didik harus ingat konsep perkalian matriks.

Untuk memperoleh simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat melakukan kegiatan yang sama seperti penarikan simpulan pada aktivitas sebelumnya. Pandulah diskusi agar dapat memperoleh jawaban yang benar dari soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan contoh 3.9 dan 3.10 serta menyimpulkan yang peserta didik ketahui tentang sifat invers matriks dengan tepat. Gunakan Sifat 3.5 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

b. Pendinginan

Pada kegiatan pendinginan, bapak/ibu guru dapat mengulas kembali kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan dalam subbab F dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Apa yang kalian ingat tentang definisi determinan matriks?
- Bagaimana cara menentukan penyelesaian dari SPLDV menggunakan matriks?
- Apa saja metode untuk menentukan determinan matriks berordo 3 × 3?
- Bagaimana langkah-langkah menentukan determinan matriks berordo 3 × 3 dengan metode sarrus?
- Bagaimana langkah-langkah menentukan determinan matriks berordo 3 × 3 dengan metode ekspansi kofaktor?
- Bagaimana cara menentukan penyelesaian dari SPLTV menggunakan matriks?
- Apa sifat determinan matriks yang kalian ketahui?
- Apa yang kalian ingat tentang definisi dan rumus invers matriks?
- Apa sifat invers matriks yang kalian ketahui?

Selanjutnya, soal nomor 4 dalam Latihan F dapat bapak/ibu guru gunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik menyelesaikannya.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Determinan dan Invers Matriks. Mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi pada buku siswa nomor 18-26.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan F Determinan dan Invers Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. *Salah.* Cobalah buktikan menggunakan matriks.
2. *Benar.*
3. *Benar.*
4. Karena $AC = B$, maka $C = A^{-1}B$.

$$C=\begin{bmatrix}2&5\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19&1\\8&0\end{bmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}-19&1\\8&0\end{vmatrix}=-19(0)-(8)(1)=-8$$

5. $(AB^{-1})^{-1}=BA^{-1}=\begin{bmatrix}5&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&23\\7&13\end{bmatrix}$

6. Misalkan

Banyak bakteri dari Strain I = x

Banyak bakteri dari Strain II = y

Banyak bakteri dari Strain III = z

Diperoleh

$$\begin{bmatrix}1&4&3\\2&2&1\\1&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}980\\740\\680\end{bmatrix}$$

a. Menentukan banyak bakteri dari Strain I, Strain II, dan Strain III dengan cara determinan matriks adalah sebagai berikut.

Nilai x, y, dan z dapat ditentukan:

$$D_x=\begin{vmatrix}980&4&3\\740&2&1\\680&4&0\end{vmatrix}=3600,\ D_y=\begin{vmatrix}1&980&3\\2&740&1\\1&680&0\end{vmatrix}=2160,$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&4&980\\2&2&740\\1&4&680\end{vmatrix}=1800,\text{ dan } D=\begin{vmatrix}1&4&3\\2&2&1\\1&4&0\end{vmatrix}=18$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{3600}{18}=200,\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{2160}{18}=120,\text{ dan}$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{1800}{18}=100$$

Banyak bakteri dari Strain I = 200

Banyak bakteri dari Strain II = 120

Banyak bakteri dari Strain III = 100

b. Menentukan banyak bakteri dari Strain I, Strain II, dan Strain III dengan cara invers matriks adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

Ingat rumus invers matriks ordo 3×3. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, maka diperoleh.

$|A| = 18$

$$K(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$Adjo\text{int}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -4 & 12 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nilai *x*, *y*, dan *z* dapat ditentukan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Banyak bakteri dari Strain I = 200

Banyak bakteri dari Strain II = 120

Banyak bakteri dari Strain III = 100

b. Penugasan

Sebagai penugasan, bapak/ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal Latihan F pada nomor 1, 2, 3, 5 dan 6. Soal-soal tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami materi determinan dan invers matriks. Selain itu, bapak/ibu guru dapat menggunakan fitur Mari, Berpikir Kreatif sebagai penugasan. Setelah mengerjakan diharapkan pemahaman peserta didik tentang determinan matriks menjadi luas.

Mari Berpikir Kreatif

Alternatif Penyelesaian

- $|ABC| = |(AB)C|$ sifat asosiatif

  $= |AB||C|$ sifat 3.4

  $= |A||B||C|$ sifat 3.4

  Jadi jika $|A|$, $|B|$, dan $|C|$, maka $|ABC| = |A||B||C|$.

- Misalkan matriks-matriks persegi berikut

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  $|kA| = |k(IA)|$ sifat identitas

  $= |(kI)||A|$ sifat asosiatif

  $= |kI||A|$ sifat 3.4

  $= k^n|A|$

  dengan

$$|kI| = \left| k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{vmatrix} = \underbrace{k \times k \times k \times \cdots \times k}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} = k^n$$

Jadi jika A merupakan matriks berordo $n \times n$ dan k merupakan skalar, maka $|kA| = k^n|A|$.

J. Alternatif Penyelesaian: Uji Kompetensi

1. Uji Pemahaman

1. *Salah.* Karena matriks B tidak harus memiliki 3 baris. Banyak baris matriks B sama dengan banyak kolom matriks A.
2. *Salah.* Karena $I^2 = A = IA = A$
3. *Salah.* Karena perkalian matriks tidak bersifat komutatif.
4. *Benar.*
5. nilai $x = 2$, $y = 4$, dan $z = 6$.
6. Nilai $a = 8$, $b = 1$, dan $c = 6$, sehingga $c\sqrt{b+a} = 6\sqrt{1+8} = 18$.
7. Karena prinsip yang digunakan yaitu banyak kendaraan yang masuk menuju titik persimpangan A, B, C, dan D harus sama dengan jumlah kendaraan yang keluar, maka diperoleh.
$$\begin{bmatrix} 310+250 \\ x_1+260 \\ x_2+400 \\ x_3+360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330+x_1 \\ x_2+190 \\ x_3+290 \\ 520+250 \end{bmatrix}$$
dengan konsep kesamaan dua matriks diperoleh nilai $x_1 = 230$, $x_2 = 300$, dan $x_3 = 410$.
8. Jumlah tawaran dapat diperoleh dari menjumlahkan ketiga matriks sebagai berikut.
$$\begin{bmatrix} 16 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+15+19 \\ 14+13+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 51 \end{bmatrix}$$
Jadi kontraktor yang akan dipilih untuk pemasangan baja ringan agar pengeluaran minimum adalah kontraktor A dengan total biaya Rp50.000.000,00..
9. Untuk menentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 agar persamaan kimia setimbang dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.
$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_1+x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_3 \\ 12x_3 \\ 6x_3+12 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, diperoleh nilai $x_1=6$, $x_2=6$, dan $x=1$. Jadi persamaan reaksi kesetimbangan adalah $6CO_2 + 6H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2$.

10. $PQ = \begin{bmatrix} 20 & 19 \\ 8 & 12 \\ 15 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 29 \\ 16 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 904 & 979 \\ 432 & 484 \\ 722 & 792 \end{bmatrix}$

    interpretasikan setiap elemen matriks PQ adalah sebagai berikut.
    - jenis furniture *free standing furniture* membutuhkan 904m² material MDF;
    - jenis furniture *built in furniture* membutuhkan 432m² material MDF;
    - jenis furniture *knockdown furniture* membutuhkan 722m² material MDF;
    - jenis furniture *free standing furniture* membutuhkan 979m² material *plywood*;
    - jenis furniture *built in furniture* membutuhkan 484m² material *plywood*;
    - jenis furniture *knockdown furniture* membutuhkan 792m² material *plywood*.
11. total keluaran sektor P adalah 284 dan sektor Q adalah 381.
12. Dengan menggunakan konsep determinan matriks atau dapat menggunakan invers matriks, maka diperoleh $I_1 = \frac{1}{2}$ Ampere, $I_2 = 2$ Ampere, dan $I_3 = \frac{5}{2}$ Ampere.
13. Matriks $A^{2017} + A^{2020} + A^{2023} = I$, dengan I adalah matriks identitas berordo matriks 2×2.
14. $D = D_x = D_y = 0$
15. Dengan konsep barisan aritmatika dan geometri diperoleh nilai $a=4$, $b=5$, dan $c=2$. Karena $\det\left(\left(\left(\left(P^t\right)^{-1}\right)^t\right)^{-1}\right)^t = \det A^t$ dan $\det A^t = -4$, jadi $\det\left(\left(\left(\left(P^t\right)^{-1}\right)^t\right)^{-1}\right)^t = -4$.

K. Alternatif Penyelesaian: Proyek

Pesan Rahasia

Penyelesaian dari proyek ini akan berbeda-beda, tergantung pada pesan yang akan kita kirim. Berikut ini adalah salah satu contoh jawaban dari peserta didik.

Membuat pesan rahasia

1. Misalkan sebuah pesan yang akan dikirim untuk kelompok lain adalah "MATEMATIKA MENYENANGKAN".
2. Buat aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai urutan alphabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	3	4	...	26

3. Mengubah pesan kalian menjadi kode angka

Huruf	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	spasi	
Angka	13	1	20	5	13	1	20	9	11	1	0	
Huruf	M	E	N	Y	E	N	A	N	G	K	A	N
Angka	13	5	14	25	5	14	1	14	7	11	1	14

4. $$A = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 20 & 1 & 5 & 5 & 14 & 1 \\ 1 & 13 & 9 & 0 & 14 & 14 & 7 & 14 \\ 20 & 1 & 11 & 13 & 25 & 1 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

5. $$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. $$KA = \begin{bmatrix} 67 & 25 & 71 & 28 & 74 & 26 & 57 & 16 \\ 80 & 30 & 91 & 29 & 79 & 31 & 71 & 17 \\ 62 & 29 & 51 & 39 & 103 & 31 & 47 & 28 \end{bmatrix}$$

7. Setelah melakukan operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks KA, diperoleh matriks $\begin{bmatrix} 13 & 25 & 17 & 1 & 20 & 26 & 3 & 16 \\ 26 & 3 & 10 & 2 & 25 & 4 & 17 & 17 \\ 8 & 2 & 24 & 12 & 22 & 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}$

8. Mengubah kembali setiap elemen hasil mod 27 yang kalian peroleh dari langkah 7 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah 3.

Angka	13	26	8	25	3	2	17	10	24	1	2	12
Huruf	M	Z	H	Y	C	B	Q	J	X	A	B	L
Angka	20	25	22	26	4	4	3	17	20	16	17	1
Huruf	T	Y	V	Z	D	D	C	Q	T	P	Q	A

Pesan rahasia yang dikirim ke kelompok lain adalah "MZHYCBQJXABLTYVZDDCQTPQA".

Membuat pesan rahasia

1. Gunakan aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai urutan alphabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	3	4	...	26

2. Mengubah pesan yang telah diterima menjadi kode angka.

Huruf	M	Z	H	Y	C	B	Q	J	X	A	B	L
Angka	13	26	8	25	3	2	17	10	24	1	2	12
Huruf	T	Y	V	Z	D	D	C	Q	T	P	Q	A
Angka	20	25	22	26	4	4	3	17	20	16	17	1

3. $$B = \begin{bmatrix} 13 & 25 & 17 & 1 & 20 & 26 & 3 & 16 \\ 26 & 3 & 10 & 2 & 25 & 4 & 17 & 17 \\ 8 & 2 & 24 & 12 & 22 & 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $A = K^{-1}B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13 & 25 & 17 & 1 & 20 & 26 & 3 & 16 \\ 26 & 3 & 10 & 2 & 25 & 4 & 17 & 17 \\ 8 & 2 & 24 & 12 & 22 & 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -22 & -7 & 1 & 5 & -22 & 14 & 1 \\ 55 & -203 & -45 & 27 & 14 & -202 & 115 & -40 \\ -34 & 136 & 38 & -14 & -2 & 136 & -70 & 27 \end{bmatrix}$$

5. Hasil operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks A adalah

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 20 & 1 & 5 & 5 & 14 & 1 \\ 1 & 13 & 9 & 0 & 14 & 14 & 7 & 14 \\ 20 & 1 & 11 & 13 & 25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Mengubah kembali elemen hasil mod 27 yang kalian peroleh dari langkah 5 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah 1.

Angka	13	1	20	5	13	1	20	9	11	1	0	
Huruf	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	spasi	
Angka	13	5	14	25	5	14	1	14	7	11	1	14	0
Huruf	M	E	N	Y	E	N	A	N	G	K	A	N	spasi

7. Isi dari pesan rahasia adalah "MATEMATIKA MENYENANGKAN". Untuk memecahkan pesan rahasia dapat menggunakan Sifat 3.5.



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)

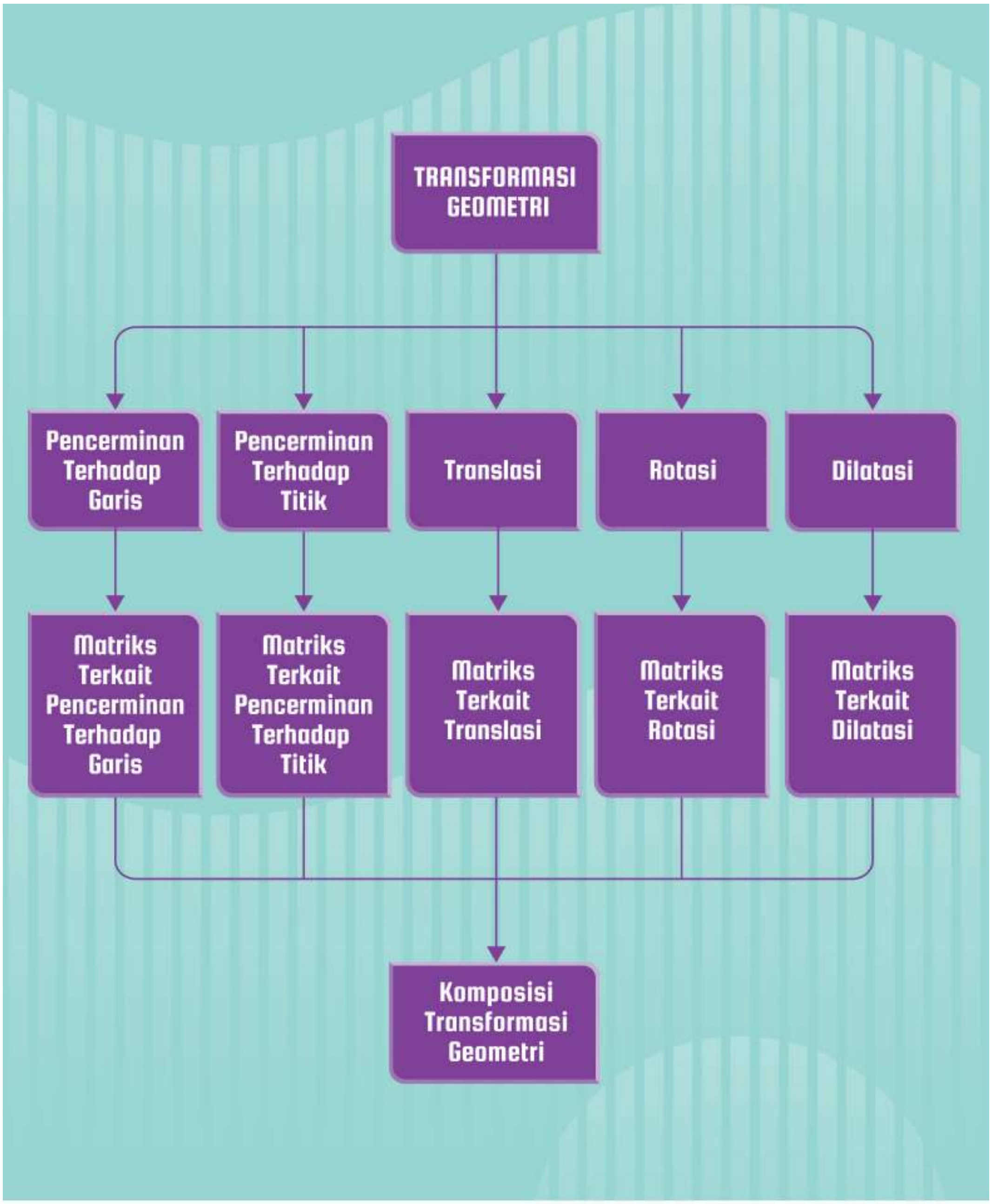
Bab 4
Transformasi Geometri

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Menjelaskan definisi dari beberapa transformasi.
2. Melakukan berbagai macam transformasi geometri terhadap berbagai macam bentuk geometri.
3. Mengidentifikasi dan menggunakan komposisi transformasi geometri.
4. Mendeskripsikan transformasi menggunakan koordinat kartesius dan matriks.
5. Mengoperasikan komposisi transformasi geometri dengan bantuan matriks yang merepresentasikan transformasi.
6. Menerapkan transformasi geometri dalam permasalahan nyata.

A. Peta Konsep



Kata Kunci	Transformasi, Pencerminan, Translasi, Rotasi, Dilatasi, Komposisi Transformasi

B. Gambaran Umum

Di tingkat SMP/MTs, peserta didik telah mempelajari transformasi geometri seperti translasi, pencerminan, rotasi, dan dilatasi. Materi-materi tersebut merupakan prasyarat untuk mempelajari bab ini. Di tingkat SMP, peserta didik telah mempelajari esensi dari transformasi dari sudut pandang geometri Euclid. Namun, di SMP, peserta didik belum mempelajari transformasi geometri secara lebih detail dengan definisi formal di geometri Euclid. Pada bab ini, secara umum, kita akan dikenalkan dengan transformasi secara lebih formal pada bidang kartesius, mempelajari keterkaitan matriks dan operasinya dengan transformasi, dan juga komposisi transformasi dengan memanfaatkan matriks-matriks yang merepresentasikan transformasi terkait.

Pada subbab A, bapak/ibu guru akan mengajarkan materi transformasi geometri pada bidang kartesius. Siswa akan mempelajari definisi maupun sifat-sifat yang terkait dengan transformasi pada bidang Kartesius. Yang dipelajari termasuk hasil pemetaan suatu titik oleh suatu transformasi secara aljabar.

Pada subbab B, peserta didik akan mempelajari keterkaitan antara matriks 2×2 dengan transformasi, beserta operasi matriks lain yang terkait dengan transformasi. Ada transformasi yang dapat direpresentasikan dengan sebuah matriks 2×2. Ada juga transformasi yang dapat direpresentasikan dengan beberapa operasi matriks seperti perkalian skalar, penjumlahan dengan vektor, atau kombinasi antara perkalian dengan matriks 2×2 dan penjumlahan dengan vektor.

Pada subbab terakhir, peserta didik akan mempelajari komposisi transformasi dan keterkaitannya dengan operasi-operasi matriks. Bapak/Ibu guru akan membimbing peserta didik dalam mempelajari bagaimana mengoperasikan komposisi transformasi dan memahami notasinya.

C. Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Transformasi pada Bidang Kartesius	20	1. Menjelaskan pengertian pencerminan terhadap garis, pencerminan terhadap suatu titik, translasi, rotasi, dan dilatasi. 2. Menentukan peta dari berbagai macam transformasi berikut: 3. Pencerminan terhadap sumbu X. 4. Pencerminan terhadap sumbu Y. 5. Pencerminan terhadap garis $y = x$. 6. Pencerminan terhadap garis $y = -x$. 7. Pencerminan terhadap garis $x = k$. 8. Pencerminan terhadap garis $y = h$. 9. Pencerminan terhadap titik. 10. Translasi dengan suatu vektor. 11. Rotasi. 12. Dilatasi.	1. Pencerminan terhadap garis 2. Pencerminan terhadap titik 3. Translasi 4. Rotasi 5. Dilatasi	Garis refleksi, titik pusat, vektor, sudut, faktor pengali.	Penemuan terbimbing, diskusi, ekspositori	Buku Siswa	Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Kelas XI KD 3.5

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Kaitan Matriks dengan Transformasi	10	1. Menentukan peta dari berbagai macam transformasi berikut dengan menggunakan operasi matriks: 2. Pencerminan terhadap garis. 3. Pencerminan terrhadap titik. 4. Translasi dengan suatu vektor. 5. Rotasi. 6. Dilatasi.	1. Matriks terkait pencerminan. 2. Matriks terkait rotasi. 3. Matriks terkait translasi. 4. Matriks terkait dilatasi.	Matriks, operasi matriks, perkalian matriks, vektor posisi.	Penemuan terbimbing, diskusi, ekspositori.	Buku Siswa	Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Kelas XI KD 3.5
Komposisi Transformasi dengan Matriks	5	1. Menentukan peta dari komposisi transformasi dengan menggunakan operasi matriks.	1. Komposisi transformasi	Perkalian antar matriks.	Penemuan terbimbing, diskusi, ekspositori.	Buku Siswa	Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Kelas XI KD 3.5

D. Panduan Pembelajaran: Transformasi Geometri

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di Bab 4 Subab A Transformasi pada Bidang Kartesius dibagi menjadi sepuluh aktivitas. Kesepuluh kegiatan tersebut dirancang agar peserta didik memahami bagaimana cara mencari peta dari berbagai macam transformasi di bidang Kartesius. Pada aktivitas pertama sampai keenam, peserta didik akan mempelajari pencerminan terhadap garis. Selanjutnya, peserta didik dibimbing untuk memahami pencerminan terhadap titik di aktivitas ketujuh. Di aktivitas kedelapan, peserta didik akan diajak untuk menemukan formula aljabar dari translasi dengan suatu vektor. Pada aktivitas kesembilan, peserta didik dibimbing untuk menemukan formula aljabar dari rotasi. Terakhir, di aktivitas kesepuluh, peserta didik akan dipandu untuk menemukan formula aljabar dari dilatasi.

Alternatif Pembelajaran

Guru dapat menjadikan aktivitas 1-6 sebagai sebuah aktivitas dengan cara mendelegasikan setiap aktivitas ke tiap kelompok. Hal ini dimungkinkan karena pada buku ini aktivitas 1-6 sangat serupa dan yang membedakan adalah kegiatan eksplorasinya.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Transformasi pada Bidang Kartesius, peserta didik diharapkan mampu untuk melakukan hal-hal berikut.

1. Menjelaskan pengertian pencerminan terhadap garis, pencerminan terhadap suatu titik, translasi, rotasi, dan dilatasi.
2. Menentukan peta dari berbagai macam transformasi berikut:
    - Pencerminan terhadap sumbu X.
    - Pencerminan terhadap sumbu Y.
    - Pencerminan terhadap garis $y = x$.
    - Pencerminan terhadap garis $y = -x$.
    - Pencerminan terhadap garis $x = k$.
    - Pencerminan terhadap garis $y = h$.
    - Pencerminan terhadap titik.

- Translasi dengan suatu vektor.
- Rotasi.
- Dilatasi.

b. Alat dan Bahan

- Alat tulis
- Buku berpetak
- Desmos yang dapat diakses menggunakan internet

c. Persiapan Guru

- Bagaimana cara Anda menjembatani pengetahuan awal peserta didik tentang transformasi di bidang Euclid yang diajarkan pada tingkat SMP untuk memahami transformasi pada bidang Kartesius?
- Bagaimana Anda menggunakan konteks-konteks dalam buku siswa, yaitu operasi pada bidang kartesius untuk membimbing peserta didik dalam menemukan formula aljabar untuk beberapa transformasi yang dibahas di bab ini?
- Miskonsepsi apa saja yang mungkin akan dilakukan peserta didik ketika mempelajari transformasi pada bidang Kartesius?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Di dalam kegiatan pemanasan, peserta didik diajak untuk mencermati dan memaknai definisi pencerminan terhadap suatu garis. Definisi ini akan digunakan sebagai dasar untuk mencari berbagai macam formula untuk beberapa garis khusus. Pada kegiatan pemanasan ini, fokuskan perhatian peserta didik untuk memahami definisi pencerminan pada bidang Kartesius.

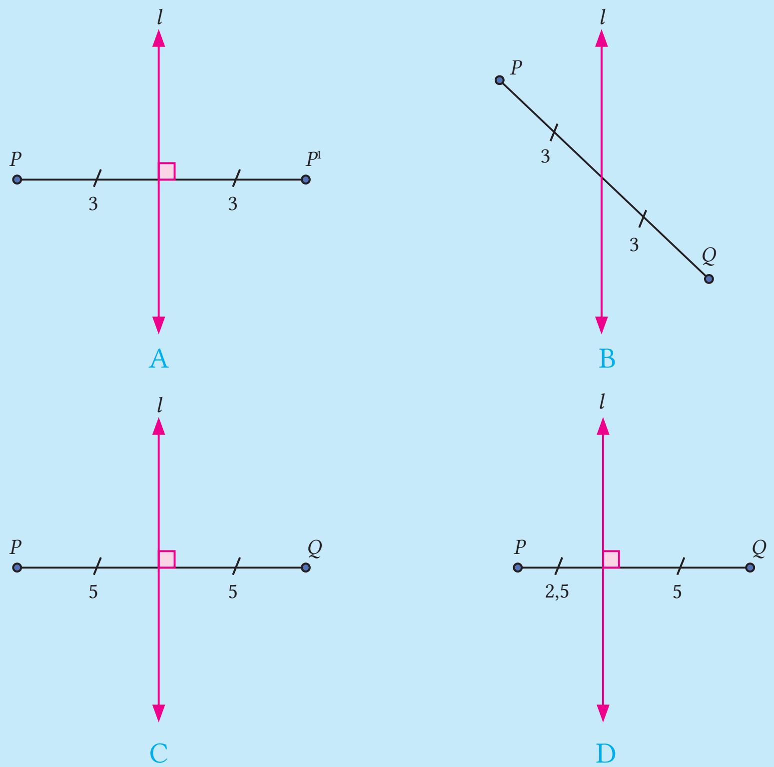
Kegiatan Di kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat bercerita tentang pencerminan yang telah dipelajari di SMP. Bagilah peserta didik di kelas menjadi beberapa kelompok untuk mendiskusikan apa saja yang mereka ingat tentang pencerminan di SMP. Berikanlah kesempatan peserta didik untuk menggambarkan seperti apa yang disebut dengan pencerminan baik di buku (dapat berupa buku petak) ataupun di papan tulis. Berikan kesempatan peserta didik untuk mengungkapkan pemikiran mereka tentang apa yang disebut dengan pencerminan. Setelah itu,

tampilkan definisi yang ada di buku. Berikan kesempatan pada peserta didik untuk mendiskusikan perbedaan maupun persamaan pendapat mereka yang telah mereka ungkapkan di awal dengan Definisi 4.1 yang ada di buku. Berikan waktu kepada peserta didik untuk mengilustrasikan definisi yang ada di buku dalam bentuk visual.

Selain kegiatan tersebut. Pemanasan juga dapat dilakukan dengan kegiatan berikut.

Alternatif Pembelajaran

Menurutmu, gambar mana yang paling beda dari yang lain?



Gunakan pertanyaan dan ilustrasi tersebut untuk melakukan pemanasan. Pertama, bagilah pojok kelas menjadi tempat untuk siswa yang memilih gambar tertentu. Misalnya pojok kanan depan kelas untuk Gambar A. Setelah siswa berdiri di sudut kelas sesuai dengan gambar pilihan merek, mintalah setiap grup untuk menjelaskan alasan mereka kenapa gambar yang dipilih adalah yang paling beda.

Untuk menyimpulkan aktivitas pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk menyampaikan gagasannya sehingga terjadi

diskusi secara klasikal. Di dalam diskusi tersebut, peran Bapak/Ibu Guru adalah menghubungkan gagasan-gagasan tersebut dengan karakteristik dari operasi pencerminan, serta komponen dari operasi pencerminan. Salah satu karakteristik yang dipilih, misalnya, adalah karakteristik tegak lurus (bahwa segmen yang terbentuk dari prapeta dan peta tegak lurus dengan garis refleksi) dan sama panjang (bahwa jarak peta ke garis refleksi sama dengan jarak dari prapeta ke garis refleksi).

Aktivitas 1

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Definisi 4.1. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok mengerjakan aktivitas Eksplorasi "Mencari peta dari pencerminan terhadap sumbu *X*". Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Sumbu *X*

Alternatif Penyelesaian

1. Koordinat peta dari titik B, C, dan D adalah sebagai berikut.

Pra-peta	Peta
$A = (-5,2)$	$A' = (-5,-2)$
$B = (-3,1)$	$B' = (-3,-1)$
$C = (1,2)$	$C' = (1,-2)$
$D = (4,-2)$	$D' = (4,2)$

2. Berdasarkan beberapa titik yang dicerminkan sebelumnya, tampaknya ada keterkaitan antara koordinat peta dan prapeta dari operasi pencerminan terhadap sumbu *X*. Pola yang tampak adalah bahwa ordinat (nilai y) dari koordinat peta adalah negatif dari ordinat prapeta.
3. Untuk sebarang titik $P(x,y)$, peta dari pencerminannya terhadap sumbu X adalah $P'(x,-y)$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 2

Aktivitas kedua ini serupa dengan aktivitas yang pertama namun dengan kegiatan Eksplorasi yang berbeda yakni "Mencari peta dari pencerminan terhadap sumbu *Y*". Alternatif penyelesaiannya dapat disimak sebagai berikut.

Eksplorasi Mencari peta dari pencerminan terhadap sumbu *Y*

Alternatif Penyelesaian

1. Koordinat peta dari titik A, C, dan D adalah sebagai berikut.

Pra-peta	Peta
$A = (-3,4)$	$A' = (3,4)$
$B = (-2,2)$	$B' = (2,2)$
$C = (-4,-2)$	$C' = (4,-2)$
$D = (3,-4)$	$D' = (-3,-4)$

2. Berdasarkan beberapa titik yang dicerminkan sebelumnya, tampaknya ada keterkaitan antara koordinat peta dan prapeta dari operasi pencerminan terhadap sumbu *Y*. Pola yang tampak adalah bahwa absis (nilai *x*) dari koordinat peta adalah negatif dari absis prapeta.
3. Untuk sebarang titik $P(x, y)$, peta dari pencerminannya terhadap sumbu *Y* adalah $P(-x, y)$.

Aktivitas 3

Aktivitas ketiga ini serupa dengan aktivitas yang pertama namun dengan kegiatan Eksplorasi yang berbeda yakni "Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $y = x$". Alternatif penyelesaiannya dapat disimak sebagai berikut.

Eksplorasi Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $y = x$

Alternatif Penyelesaian

1. Koordinat peta dari titik B, C, dan D adalah sebagai berikut.

Pra-peta	Peta
$A = (1,4)$	$A' = (4,1)$
$B = (-2,2)$	$B' = (2,-2)$
$C = (-1,-3)$	$C' = (-3,-1)$
$D = (6,4)$	$D' = (4,6)$

2. Berdasarkan beberapa titik yang dicerminkan sebelumnya, tampaknya ada keterkaitan antara koordinat peta dan prapeta dari operasi pencerminan terhadap garis $y = x$. Pola yang tampak adalah bahwa ordinat (nilai y) dari koordinat peta adalah absis (nilai x) dari prapeta.
Di lain pihak, absis dari peta adalah ordinat dari prapeta.
3. Untuk sebarang titik $P(x, y)$, peta dari pencerminannya terhadap garis $y=x$ adalah $P'(y, x)$.

Aktivitas 4

Ativitas keempat ini serupa dengan aktivitas yang pertama namun dengan kegiatan Eksplorasi yang berbeda yakni "Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $y = -x$". Alternatif penyelesaiannya dapat disimak sebagai berikut.

Eksplorasi Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $y = -x$

Alternatif Penyelesaian

1. Koordinat peta dari titik A, B, dan C adalah sebagai berikut.

Pra-peta	Peta
$A = (-2,4)$	$A' = (-4,2)$
$B = (-2,2)$	$B' = (-2,2)$
$C = (1,-3)$	$C' = (3,-1)$
$D = (2,1)$	$D' = (-2,-1)$

2. Berdasarkan beberapa titik yang dicerminkan sebelumnya, tampaknya ada keterkaitan antara koordinat peta dan prapeta dari operasi pencerminan terhadap garis $y = -x$. Pola yang tampak adalah bahwa ordinat (nilai y) dari koordinat peta adalah negatif dari absis (nilai x) dari prapeta. Di lain pihak, absis dari peta adalah negatif dari ordinat dari prapeta.
3. Untuk sebarang titik $P(x, y)$, peta dari pencerminannya terhadap garis $y = -x$ adalah $P'(-y,-x)$.

Aktivitas 5

Aktivitas keempat ini serupa dengan aktivitas yang pertama namun dengan kegiatan Eksplorasi yang berbeda, yakni "Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $x = k$". Alternatif penyelesaiannya dapat disimak sebagai berikut.

Eksplorasi Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $x = k$

Alternatif Penyelesaian

1. Jarak dari titik $A(x, y)$ ke sumbu Y adalah $|x| = x$.
2. Jarak dari titik $A(x,y)$ ke garis $x = k$ adalah $|k - x| = k - x$.
3. Berdasarkan Definisi 4.1, jarak dari titik A' (...,...) ke garis $x = k$ sama dengan jarak dari titik $A(x,y)$ ke garis $x = k$, yakni $k - x$.
4. Ordinat dari A' sama dengan ordinat dari A. Pada kasus ini, absis dari A' adalah jarak A ke sumbu Y, yakni $(i) + (ii) + (iii) = (x) + (k + x) + (k - x) = 2k - x$.

Aktivitas 6

Aktivitas keempat ini serupa dengan aktivitas yang pertama namun dengan kegiatan Eksplorasi yang berbeda yakni "Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $y = h$". Alternatif penyelesaiannya dapat disimak sebagai berikut.

Eksplorasi Mencari peta dari pencerminan terhadap garis $y = h$

Alternatif Penyelesaian

1. Jarak dari titik $A(x,y)$ ke sumbu Y adalah $|y| = y$.
2. Jarak dari titik $A(x,y)$ ke garis $y = h$ adalah $|h - y| = h - y$.
3. Berdasarkan Definisi 4.1, jarak dari titik A' (...,...) ke garis $y = h$ sama dengan jarak dari titik $A(x,y)$ ke garis $y = h$, yakni $h - y$.
4. Ordinat dari A' sama dengan ordinat dari A. Pada kasus ini, absis dari A' adalah jarak A ke sumbu Y, yakni $(i) + (ii) + (iii) = (y) + (h - y) + (h - y) = 2h - y$.

Aktivitas 7

Untuk mengawali aktivitas ini, lontarkan pertanyaan pemantik yang dapat menggali dugaan mereka tentang bagaimana mendefinisikan pencerminan terhadap titik berdasarkan pengalaman mereka dalam pencerminan terhadap garis. Selanjutnya, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Ajak siswa untuk mendiskusikan pertanyaan tersebut dalam kelompoknya, kemudian mintalah setiap kelompok untuk mempresentasikan pendapat mereka. Bandingkan definisi mereka dengan Definisi yang ada di buku siswa. Selanjutnya, mintalah setiap kelompok tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi "Mencari peta dari pencerminan terhadap titik." Selama kelompok

mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari peta dari pencerminan terhadap titik

Alternatif Penyelesaian

1. $P(a,b)$ dapat dituliskan sebagai $P'\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$.
2. Berdasarkan 1, kita memiliki dua persamaan untuk absis dan ordinat, yakni $a = \frac{x+x'}{2}$ dan $b = \frac{y+y'}{2}$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan (x',y') sebagai $(-x + 2a, -y + 2b)$. Akibatnya, untuk sebarang titik $P(x,y)$, peta dari pencerminannya terhadap titik $P(a,b)$ adalah $(-x + 2a, -y + 2b)$.

Untuk membimbing peserta didik dalam membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 8

Untuk mengawali aktivitas ini, ajaklah peserta didik untuk mencermati Definisi tentang Translasi yang ada di buku siswa. Kemudian, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Mari, mencoba pada bagian Translasi. Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Mari, Mencoba 4.13

Alternatif Penyelesaian Peta dari titik $(-4,4)$ ditranslasikan dengan vektor $(-2,-3)$ adalah $(-4-2,4-3) = (-6,1)$.

Kegiatan Mari Mencoba selanjutnya adalah sebagai berikut.

Mari, Mencoba 4.14

Alternatif Penyelesaian Setiap (x,y) yang ada di garis $l = 5x - 2y + 3 = 0$ ditranslasikan dengan vektor $(2, -1)$ menjadi $(x',y') = (x + 2y - 1)$. Artinya, kita dapat tulis ulang (x,y) menjadi $(x' - 2, y' + 1)$. Untuk mendapatkan persamaan dari garis peta l', kita substitusikan nilai $(x' - 2, y' + 1)$ ke (x,y), sehingga diperoleh $l' = 5(x' - 2) - 2(y' + 1) + 3 = 0$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 9

Untuk mengawali aktivitas ini, ajak peserta didik untuk mencermati definisi tentang rotasi yang ada di buku siswa. Kemudian, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut mengerjakan aktivitas Mari, Mencoba pada bagian rotasi. Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Mari, Mencoba 4.15

Alternatif Penyelesaian Peta dari titik $A(3,0)$ dirotasikan terhadap titik asal $(0,0)$ sebesar 90° adalah $(0,3)$.

Kegiatan Mari, Mencoba selanjutnya adalah sebagai berikut.

Mari, Mencoba 4.16

Alternatif Penyelesaian Peta dari garis $y = 4x$ dirotasikan terhadap titik asal $(0,0)$ sebesar 90° adalah $y = -\frac{1}{4}x$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 10

Untuk mengawali aktivitas ini, ajak peserta didik untuk mencermati definisi tentang dilatasi yang ada di buku siswa. Kemudian, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Mari, Mencoba pada bagian dilatasi. Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Mari, Mencoba 4.17

Alternatif Penyelesaian Peta dari $B(2,5)$ oleh dilatasi $D(0,3)$ adalah $B'(6,15)$.

Kegiatan Mari, Mencoba selanjutnya adalah sebagai berikut.

Mari, Mencoba 4.18

Alternatif Penyelesaian Peta dari $B(2,5)$ oleh dilatasi dengan pusat $P(1,3)$ dan faktor 3 adalah $B' = (3 \times (2 - 1), 3 \times (5 - 3)) = (3,6)$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Kesimpulan Di akhir Aktivitas sepuluh, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mengulas kembali pembelajaran yang telah dilakukan. Dalam ulasan ini, pertimbangkan untuk menanyakan beberapa pertanyaan panduan berikut.

- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian menentukan koordinat titik peta dari dilatasi pada bidang kartesius?

b. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab transformasi, Bapak/Ibu Guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya adalah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana cara kalian menentukan peta untuk sembarang titik yang ditransformasikan menggunakan operasi pencerminan terhadap garis, pencerminan terhadap titik, translasi, rotasi, dan dilatasi?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami transformasi pada bidang Kartesius, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan A nomor 5. Beri waktu 7 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi
Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Transformasi pada bidang Kartesius, mintalah peserta didik mengisi tabel di bagian refleksi di Buku Siswa nomor 1-10.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

Pemahaman Konsep

1. *Salah*. Sebagai contoh, persegi akan dipetakan menjadi persegi namun luasnya akan berubah jika dilatasi dengan faktor dua.
2. *Salah*. Berdasarkan Sifat 4.7, Peta dari titik (x,y) yang dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ adalah $(-x,-y)$.
3. *Benar*.

4. *Benar.*

Penerapan Konsep

5. Berikut jawaban untuk soal nomor 5:
   a. Berdasarkan Sifat 4.3, diperoleh (7,3).
   b. Berdasarkan Sifat 4.1, setiap titik $P(x, y)$ di parabola $2x^2 - y + 9 = 0$ dicerminakan oleh sumbu X ke $P' = (x',y') = (x,-y)$. Karena itu, untuk memperoleh persamaan dari hasil peta dari parabola tersebut, kita subtitusikan $x = x'$ dan $y = -y'$. Hasilnya adalah $2x^2 - (-y') + 9 = 0 \Longleftrightarrow 2x'^2 + y' + 9 = 0$. Dengan kata lain, karena x' dan y' adalah variabel semu, kita dapat tuliskan persamaan dari peta sebagai $2x^2 + y + 9 = 0$.
   c. Berdasarkan Definisi 4.3, segitiga peta $A'B'C'$ memiliki persamaan $A' = (1 - 5, 2 + 3) = (-4,5)$, $B' = (3 - 5, 1 + 3) = (-2,2)$, dan $C' = (-1 - 5, -3 + 3) = (-7,0)$.
   d. Berdasarkan Definisi 4.2, setiap titik $P(x,y)$ di garis $3x - 2y + 5 = 0$, dipetakan ke $P' = (x',y') = (-x,-y)$. Kita juga dapat tulis $(x,y) = (-x',-y')$. Untuk mendapatkan persamaan dari garis peta, kita subtitusikan nilai $(x,y) = (-x',-y')$ ke $3x - 2y + 5 = 0$, sehingga diperoleh $-3x' + 2y' + 5 = 0$. Karena x' dan y' adalah variabel semu, kita dapat tuliskan persamaan dari peta sebagai $-3x' + 2y' + 5 = 0$.
   e. Diketahui bahwa tiap titik $P(x,y)$ dicerminkan terhadap sumbu Y menjadi $P'(-x,y)$. Peta dari $y = x^3 - 7x^2 + 2x - 5$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y adalah $y = (-x)^3 - 7(-x)^2 + 2(-x) - 5 = -x^3 - 7x^2 - 2x - 5$.

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengerjakan kegiatan yang ada di Mari, Berpikir kritis dan Matematika dan Budaya.

E. Panduan Pembelajaran Kaitan Matriks dengan Transformasi

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di Bab 4 Subbab B Kaitan Matriks dengan Transformasi dibagi menjadi empat aktivitas. Keempat kegiatan tersebut dirancang agar peserta

didik memahami keterkaitan antara matriks dan berbagai macam transformasi di bidang Kartesius. Di aktivitas pertama, peserta didik akan dibimbing untuk menemukan matriks-matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap garis. Pada kativitas kedua, peserta didik diajak untuk menemukan matriks terkait dengan pencerminan terhadap titik. Di kegiatan ketiga, peserta didik dibimbing untuk menemukan matriks atau operasinya yang terkait dengan translasi. Di kegiatan ketiga, Bapak/Ibu Guru membimbing peserta didik untuk menemukan matriks yang terkait dengan rotasi. Selanjutnya, yang terakhir, peserta didik diajak untuk menemukan matriks dan operasinya yang terkait dengan dilatasi.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Kaitan Matriks dengan Transformasi, peserta didik diharapkan mampu untuk melakukan hal-hal berikut.

- Menentukan peta dari berbagai macam transformasi berikut dengan menggunakan operasi matriks:
- Pencerminan terhadap garis.
- Pencerminan terhadap titik.
- Translasi dengan suatu vektor.
- Rotasi.
- Dilatasi.

b. Alat dan Bahan

- Alat tulis
- Buku berpetak
- Desmos atau GeoGebra yang dapat diakses menggunakan internet

c. Persiapan Guru

- Bagaimana cara Anda menjembatani pengetahuan awal peserta didik tentang matriks yang dipelajari di Bab 3 dengan transformasi pada bidang Kartesius?
- Bagaimana Anda menggunakan konteks-konteks dalam buku siswa, yaitu operasi aljabar untuk beberapa transformasi yang dibahas di subbab A untuk menemukan operasi matriks terkait?

- Miskonsepsi apa saja yang mungkin akan dilakukan peserta didik ketika mempelajari matriks yang terkait dengan transformasi?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Di dalam kegiatan pemanasan, peserta didik diajak untuk mencermati dan memaknai contoh yang diberikan di awal subbab tentang perkalian matriks dengan vektor. Siswa juga diharapkan untuk diajak mencermati contoh yang menjelaskan bagaimana mencari matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap sumbu X. Pada kegiatan pemanasan ini, fokuskan perhatian peserta didik untuk memahami alur pencarian matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis.

Di kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu Guru dapat menceritakan ulang pengalaman belajar peserta didik tentang matriks di Bab 3. Bagilah peserta didik di kelas menjadi beberapa kelompok untuk mendiskusikan apa saja yang mereka ingat tentang perkalian matriks. Berikanlah kesempatan peserta didik untuk mengerjakan soal-soal yang ada di fitur Mari, Mencoba pada subbab ini.

Mari, Mencoba 4.19

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

Kegiatan Mari, Mencoba selanjutnya adalah sebagai berikut.

Mari, Mencoba 4.20

Alternatif Penyelesaian

Dengan mengubah titik A, B, dan C dalam bentuk vektor, kita dapat melakukan operasi perkalian matriks sebagai berikut untuk mendapatkan peta yang diinginkan.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Untuk menutup aktivitas pemanasan, Bapak/Ibu Guru dapat mengingatkan tentang konsep operasi perkalian pada matriks yang telah dipelajari pada Bab 3. Hal ini dapat dilakukan dengan menunjuk peserta didik untuk menjelaskan kepada teman-temannya bagaimana cara mengalikan suatu matriks dengan matriks yang lain.

Aktivitas 1

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Sifat 4.1-4.6. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Pembagian kelompok ini fleksibel, namun diharapkan tidak terlalu banyak peserta didik dalam satu kelompok sehingga pembelajaran menjadi efektif. Mintalah masing-masing kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi "Mencari matriks yang berkaitan dengan pencerminan". Selanjutnya, ajak peserta didik untuk mengerjakan fitur "Mari, Berpikir Kritis." Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari matriks yang berkaitan dengan pencerminan

Alternatif Penyelesaian

1. $\begin{bmatrix}r & s\\t & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}rx+sy\\tx+uy\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}r & s\\t & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}rx+sy\\tx+uy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix}rx+xy=x\\tx+uy=y\end{matrix} \Rightarrow r=-1,\ s=0,\ t=0,\ u\ =1.$

Oleh karena itu, kita peroleh matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu X adalah $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$.

3. Karena pencerminan terhadap sumbu Y memetakan (x,y) ke $(-x,y)$, kita peroleh.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} rx + sy = -x \\ tx + uy = y \end{matrix} \Longrightarrow r = -1,\ \ s = 0,\ t = 0,\ u\ = 1.$$

Oleh karena itu, kita peroleh matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu Y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Karena pencerminan terhadap garis $y = x$ memetakan (x,y) ke (y,x), kita peroleh

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} rx + sy = y \\ tx + uy = x \end{matrix} \Longrightarrow r = 0,\ \ s = 1,\ t = 1,\ u\ = 0.$$

Oleh karena itu, kita peroleh matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena pencerminan terhadap garis $y = -x$ memetakan (x,y) ke $(-y,-x)$, kita peroleh

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} rx + sy = -y \\ tx + uy = -x \end{matrix} \Longrightarrow r = 0,\ \ s = -1,\ t = -1,\ u\ = 0.$$

Oleh karena itu, kita peroleh matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Untuk kegiatan Mari, Berpikir Kritis, silahkan simak penjelasan berikut.

Mari Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

Menemukan dua operasi matriks yang diinginkan tidak dapat dengan cara yang sama dengan kegiatan Eksplorasi sebelumnya. Berdasarkan Sifat 4.5 dan

Sifat 4.6, ditambah dengan informasi dari petunjuk, kita dapat memperoleh dua persamaan berikut:

- $$\begin{bmatrix} 2k - x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} x \\ 2h - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix}$$

Berdasarkan penjabaran tersebut, kita dapat dapatkan bahwa

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $x = k$ adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $y = h$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix}.$$

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 2

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Definisi 4.2 dan Sifat 4.7. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi "Mencari matriks pencerminan terhadap titik asal (0,0)" dilanjutkan dengan Eksplorasi "Mencari matriks pencerminan terhadap sembarang titik." Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari matriks pencerminan terhadap titik asal (0,0)

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} rx + sy = -x \\ tx + uy = -y \end{matrix} \Rightarrow r = -1,\ s = 0,\ t = 0,\ u = -1.$

Oleh karena itu, kita peroleh matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap titik asal adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, bimbinglah peserta didik untuk menyelesaikan Eksplorasi berikut.

Eksplorasi Mencari matriks pencerminan terhadap sebarang titik

Alternatif Penyelesaian

Dengan menyelesaikan persamaan berikut,

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x + 2a \\ -y + 2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy + v \\ tx + uy + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2a \\ -y + 2b \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} rx + sy + v = -x + 2a \\ tx + uy = w = -y + 2b \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} rx + sy + v = -1x + 0y + 2a \\ tx + uy = w = 0x - 1y + 2b \end{matrix}$$

kita dapat peroleh $r = -1$, $s = 0$, $t = 0$, $u = -1$, $v = 2a$, dan $w = 2b$.

Akibatnya, jika kita ingin menentukan peta dari titik (x,y) yang dicerminkan terhadap titik (a,b) dengan menggunakan matriks, maka operasi matriksnya adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 3

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Definisi 4.3 dan operasi penjumlahan matriks. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi “Mencari matriks yang terkait dengan translasi”. Kemudian, peserta didik diajak

untuk memperhatikan contoh dan mari mencoba pada bagian ini. Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari matriks yang terkait dengan translasi

Alternatif Penyelesaian

Karena kita ingin vektor posisi titik tersebut dipisah, maka kita peroleh

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Untuk kegiatan Mari. Mencoba, berikut adalah rinciannya.

Mari, Mencoba 4.25

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 4.11, kita peroleh $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat kesimpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 4

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Definisi 4.4., Sifat 4., operasi perkalian matriks, dan persamaan matriks Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi "Mencari matriks rotasi terhadap titik asal (0,0) sebesar tetha". Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari matriks rotasi terhadap titik asal (0,0) sebesar tetha

Alternatif Penyelesaian

Persamaan matriks tersebut dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} rx + sy = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ tx + uy = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{matrix} \Longleftrightarrow r = \cos(\theta),\ \ s = \sin(\theta),\ t = \sin(\theta),\ u = \cos(\theta).$$

Akibatnya, kita dapat simpulkan bahwa matriks yang diingankan adalah

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, ajak peserta didik untuk mencoba aktivitas Mari, Mencoba berikut.

Mari, Mencoba 4.26

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat, maka kita dapat mencari matriks dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30^o) - \sin(30^o) \\ \sin(30^o)\cos(30^o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Aktivitas 5

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Definisi 4.5. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi “Mencari matriks yang berkaitan

dengan dilatasi". Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mencari matriks yang berkaitan dengan dilatasi

Alternatif Penyelesaian

1. Kita dapat menyelesaikan persamaan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} rx + sy = kx \\ tx + uy = ky \end{matrix}$$

$\Longleftrightarrow r = k, \; s = 0, \; t = 0, \; u = 0.$

Akibatnya, matriks yang kita inginkan adalah $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

2. Kita dapat menuliskan $\begin{bmatrix} k(x-a)+a \\ k(y-b)+b \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Berdasarkan 1, kita dapat menuliskan $k\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$ sebagai $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$. Akibatnya, kita memperoleh matriks yang terkait dilatasi dengan faktor $k \neq 0$ dan pusat (a,b) adalah $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, ajak peserta didik untuk menyelesaikan permasalahan yang ada di Mari, Mencoba berikut.

Mari, Mencoba 4.27

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat , kita dapat menemukan petanya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix}$$

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban

yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

b. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab transformasi, Bapak/Ibu Guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya adalah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana cara kalian menggunakan matriks dan operasinya untuk menentukan peta untuk sembarang titik yang ditransformasikan menggunakan operasi pencerminan terhadap garis, pencerminan terhadap titik, translasi, rotasi, dan dilatasi?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami transformasi pada bidang Kartesius, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan B nomor 5. Beri waktu 7 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi

Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Tranformasi pada bidang Kartesius, mintalah peserta didik mengisi tabel berikut 11-20.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

Pemahaman Konsep

1. *Benar.*
2. *Benar.*
3. *Salah.* $\begin{bmatrix} x+2 \\ y+3 \end{bmatrix}$
4. *Benar.*

Penerapan Konsep

5. Berikut adalah uraian jawaban untuk nomor 5:

   a. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

b. Untuk setiap titik $P(x,y)$ dipetakan ke $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$. Akibatnya, $3x^2 - 2y + 5 = 0$ dipetakan ke $3(y)^2 - 2(-x) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 2x + 5 = 0$.

c. Dengan menuliskan titik A, B, dan C sebagai kolom-kolom, kita dapat menuliskan $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{9}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Artinya, petanya adalah $A' = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $A' = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$, dan $A' = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$.

d. Untuk setiap titik $P(x,y)$ dipetakan ke $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$. Artinya, kita memiliki . $(x',y') = (3x,3y) \Leftrightarrow x = x', y = y'$. Akibatnya, $x - 2y + 3 = 0$ dipetakan ke $\left(\frac{1}{3}x'\right) - 2\left(\frac{1}{3}y'\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 9 = 0$. Karena x' dan y' adalah variabel semu, kita dapat tuliskan persamaan dari peta sebagai $x - 2y + 9 = 0$.

e. Untuk setiap titik $P(x,y)$ dipetakan ke $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix}$. Artinya, kita punya $\begin{matrix} x' = x + 2y \\ y' = y \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = x' - 2y' \\ y = y' \end{matrix}$. Akibatnya, $y = 2x^3 - x^2 + 5x$ dipetakan ke $y' = 2(x' - 2y')^2 + 5(x' - 2y')$.

6. Berikut adalah matriks yang diinginkan:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan kegiatan yang ada di Mari, Berpikir Kritis terkait dengan keterkaitan transformasi, matriks, dan bilangan kompleks.

F. Panduan Pembelajaran Komposisi Transformasi dengan Menggunakan Matriks

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di Bab 4 Subab C Komposisi Transformasi dengan Menggunakan Matriks dibagi menjadi satu aktivitas. Satu aktivitas tersebut dirancang agar peserta didik memahami keterkaitan antara komposisi transformasi dengan operasi matriks. Di aktivitas ini, peserta didik akan dibimbing untuk menemukan operasi matriks yang berkaitan dengan komposisi transformasi.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Komposisi Transformasi dengan Menggunakan Matriks, peserta didik diharapkan mampu untuk melakukan hal-hal berikut.

- Menentukan peta dari komposisi transformasi dengan menggunakan operasi matriks.

b. Alat dan Bahan

- Alat tulis
- Buku berpetak
- Desmos atau GeoGebra yang dapat diakses menggunakan internet

c. Persiapan Guru

- Bagaimana cara Anda menjembatani pengetahuan awal peserta didik tentang matriks yang dipelajari di Bab 3 dengan komposisi transformasi pada bidang Kartesius?
- Bagaimana Anda menggunakan konteks-konteks dalam buku siswa, yaitu matriks yang terkait dengan beberapa transformasi yang dibahas di subbab B untuk menemukan operasi matriks terkait komposisi transformasi?
- Miskonsepsi apa saja yang mungkin akan dilakukan peserta didik ketika mempelajari matriks yang terkait dengan transformasi?

2. Kegiatan Pembelajaranan

a. Pemanasan

Di dalam kegiatan pemanasan, peserta didik diajak untuk mencermati dan memaknai contoh yang diberikan di awal subbab tentang perkalian matriks dengan vektor. Siswa juga diharapkan untuk diajak mencermati contoh yang menjelaskan bagaimana mencari matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap sumbu X. Pada kegiatan pemanasan ini, fokuskan perhatian peserta didik untuk memahami alur pencarian matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis.

Kegiatan Di kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat menceritakan ulang pengalaman belajar peserta didik tentang matriks di Bab 3. Bagilah peserta didik di kelas menjadi beberapa kelompok untuk mendiskusikan apa saja yang mereka ingat tentang perkalian matriks.

Untuk menutup aktivitas pemanasan, Bapak/Ibu Guru dapat mengingatkan tentang konsep operasi perkalian pada matriks yang telah dipelajari pada Bab 3. Hal ini dapat dilakukan dengan menunjuk peserta didik untuk menjelaskan kepada teman-temannya bagaimana cara mengalikan suatu matriks dengan matriks yang lain.

Aktivitas 1

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali Sifat 4.1-4.6. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi

beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Pembagian kelompok ini fleksibel, namun diharapkan tidak terlalu banyak peserta didik dalam satu kelompok sehingga pembelajaran menjadi efektif. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Eksplorasi "Mencari matriks yang berkaitan dengan pencerminan". Selanjutnya, ajak peserta didik untuk mengerjakan fitur "Mari, Berpikir Kritis." Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Eksplorasi Mengoperasikan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Berikut adalah hasil peta berdasarkan dua cara
   a. Untuk sebarang titik $P(x, y)$ akan ditransformasikan oleh T_1 sebagai berikut $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, diperoleh $P'(-x, y)$ $P'(-x, y)$. Selanjutnya, $P'(-x,y)$ ditransformasikan oleh T_2 sebagai berikut $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh hasil komposisi transformasi akhirnya $P''(-y,-x)$.
   b. Alternatifnya, kita dapat memperhatikan operasi matriks berikut $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$. Akibatnya, diperoleh peta dari komposisi transformasinya adalah $P''(-y, -x)$.
2. Hasilnya sama. Berdasarkan operasi di atas, kita dapat melihat bahwa matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ berkaitan dengan transformasi $T_2 \circ T_1$ yang didapatkan dengan cara mengalikan matriks yang terkait transformasi T_1 dan T_2.
3. Hal tersebut dijamin oleh sifat asosiatif pada operasi perkalian matriks.

Setelah itu, ajak peserta didik untuk mencermati Sifat terkait. Kemudian, untuk mengasah kemampuan peserta didik untuk menggunakan sifat ini, ajak mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba.

Mari, Mencoba 4.12

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 4.16, matriks terkait pencerminan terhadap sumbu Y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks yang terkait dengan rotasi terhadap titik asal $(0,0)$ sebesar 180° adalah $\begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, matriks terkait dengan komposisi dari pencerminan terhadap sumbu X dan pencerminan terhadap sumbu Y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Akibatnya, peta yang kita inginkan dapat dicari dengan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Alternatif Pembelajaran

Untuk memperdalam pemahaman peserta didik mengenai komposisi transformasi, bapak/ibu guru dapat menggunakan aktivitas pembelajaran interaktif di Teacher Desmos.

Aktivitas pembelajaran tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mencari koneksi antar berbagai macam transformasi serta komposisinya yang telah dipelajari.

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/614d1ffdc256dd96425b29aacustom/614d1ffdc256dd96425b29aa

Kesimpulan Di akhir Aktivitas 1, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mengulas kembali pembelajaran yang telah dilakukan. Dalam ulasan ini, pertimbangkan untuk menanyakan beberapa pertanyaan panduan berikut.

- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian menentukan matriks yang terkait dengan komposisi transformasi?

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

Pemahaman Konsep

1. *Salah.* Berdasarkan matriks-matriks yang terkait dengan transformasi-transformasi tersebut, kita peroleh $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
2. *Benar.*
3. *Benar.*

Penerapan Konsep

4. Berikut adalah jawaban soal nomor 4:

   a. Pencerminan terhadap titik asal (0,0) atau rotasi terhadap titik asal (0,0) sebesar 180°.

   b. $P'(-a,-b)$
5. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan kegiatan yang ada di Mari berpikir kritis dan Aktivitas Interaktif.

G. Alternatif Penyelesaian: Uji Kompetensi

1. Uji Pemahaman

1. *Salah.*
2. *Benar.*

3. *Salah.*
4. *Salah.*
5. *Benar.*
6. Translasi.
7. Segitiga.
8. $\begin{bmatrix} \cos(270^0) & -\sin(270^0) \\ \sin(270^0) & \cos(270^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Penerapan

Isian Singkat.

10. (−2,3)
11. $2x + 3y = -7$
12. (−6,−2)
13. 36π
14. $(x + a, 2h - (y + b))$

3. Uraian.

15. Berikut adalah matriks yang terkait

    a. $\begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

    b. $\begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix}$

17. yang diinginkan adalah

    a. $-2x + 3y + 7 = 0$

    b. $y = -x^3 - 2x^2 - 3x - 4$

18. (6,5)
19. $(x + 2, -3y)$

20. $2y + 3x - 5 = 0$
21. $y = 2x^2 - 13x + 20$

Penalaran

22. Karena $y = 2x^2 - 12x + 19$, maka $y = x^2$ ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
23. Pernyataan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan operasi dari matriks yang terkait, yakni $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
24. Karena dilatasi terhadap titik asal (0,0) dapat dinyatakan sebagai perkalian sekalar, sedangkan perkalian sekalar dengan matriks 2×2 adalah komutatif.
25. Pernyataan tersebut dapat dibuktikan, salah satunya, dengan menggunakan rumus jarak dari titik ke garis $ax + by + c = 0$.

H. Alternatif Penyelesaian: Proyek

Berikut adalah salah satu contoh rubik penilaian yang dapat digunakan untuk menilai "Proyek- Modifikasi Motif Khas Daerah Dengan Transformasi Geometri." Bapak/ibu juga dapat mengembangkan proyek ini menjadi sebuah portofolio bagi peserta didik. Artinya, proyek ini dapat mulai dikerjakan pada awal semester dan kemudian dikerjakan sampai akhir semester. Setiap progress siswa direkam, misalnya, dalam bentuk portofolio kertas atau digital, misalnya di *Google Drive*. Hasil final dari motif ini juga dapat dibuat sebagai sebuah nilai prakarya tersendiri. Tugas guru adalah membimbing siswa dalam mengerjakan proyek ini sebaik mungkin. Perhatikan bahwa setiap peserta didik memiliki kecepatan dan kreativitas masing-masing, jadi jangan memaksakan suatu metode atau membatasi kreativitas siswa. Seringkali kita nanti yang akan belajar banyak dari siswa, baik dalam segi matematika, teknologi, maupun kekayaan budaya di Indonesia maupun dunia.

Tips bagi guru yang ingin melakukan penelitian, proyek ini juga dapat dijadikan sebagai bahan penelitian oleh Bapak/Ibu Guru. Misalnya, kita dapat menganalisis aspek kreativitas matematika, aspek pemahaman transformasi geometris, aspek integrasi budaya dan matematika, dan ide lain yang terkait. Penelitian juga dapat dilakukan dalam bentuk kualitatif maupun kuantitatif. Misalnya, guru dapat menggunakan metode kuantitatif dengan melaksanakan survei di awal dan akhir proyek.

Aspek Penilaian	Indikator (Poin)	Poin Maksimal
Pemilihan Motif	Peserta didik mampu mendeskripsikan motif yang dipilih. Peserta didik juga dapat menguraikan alasan memilih motif tertentu dalam hal bagaimana sejarahnya dan apa yang menjadikannya menarik dan unik bagi peserta didik. Motif dapat berasal dari manapun baik dari Indonesia maupun negara lain, namun uraian latar belakang pemilihan motif harus jelas. (20)	20
	Peserta didik mampu menguraikan salah satu alasan memilih motif tertentu dapat terkait sejarahnya atau keunikannya. (15)	
	Peserta didik memilih motif tertentu tanpa keterangan yang jelas. (5)	
Identifikasi Motif berdasarkan Transformasi Geometri	Peserta didik mampu mengidentifikasi bentuk dasar dari motif yang dipilih, menjelaskannya dalam bentuk visual, dan mendeskripsikan (dengan kata-kata dan bantuan visual) proses transformasi dari bentuk paling sederhananya sampai menjadi sebuah bentuk motif yang utuh. Peserta didik dengan secara eksplisit menggunakan istilah dalam transformasi geometri maupun konsep matematika lain yang terkait. (30)	30
	Peserta didik mampu mengidentifikasi bentuk dasar dari motif yang dipilih dan mendeskripsikan proses transformasi dari bentuk paling sederhananya sampai menjadi sebuah bentuk motif yang utuh, namun ilustrasi visual dan deskripsi kata-katanya tidak mencakup konsep transformasi geometri. (20)	
	Peserta didik hanya menampilkan bentuk paling sederhana dan bentuk motif akhir. (10)	

Aspek Penilaian	Indikator (Poin)	Poin Maksimal
Modifikasi Motif	Siswa mendeskripsikan beberapa hal berikut: 1) Motivasi dalam memodifikasi motif 2) Deskripsi modifikasi motif secara visual dan kata-kata dengan menggunakan konsep transformasi geometri di bidang kartesius. (30)	30
	Siswa hanya mendeskripsikan modifikasi motif secara visual dan kata-kata dengan menggunakan konsep transformasi geometri di bidang kartesius (20)	
	Siswa hanya mendeskripsikan motivasi dalam memodifikasi (10)	
Penggunaan koordinat Kartesius	Peserta didik menggunakan koordinat kartesius secara visual atau analitik dalam menjelaskan proses transformasi dalam dua fase: 1) Analisa motif, 2) Modifikasi motif. (10)	10
	Peserta didik menggunakan koordinat kartesius secara visual atau analitik dalam menjelaskan proses transformasi dalam salah satu diantara dua fase: 1) Analisa motif, 2) Modifikasi motif. (5).	
Presentasi di dalam bentuk video, audio, atau artikel.	Siswa menjelaskan aspek-aspek berikut: 1. Motif, asal muasalnya, dan sejarahnya 2. Analisis motif secara transformasi geometri 3. Ide modifikasi motif 4. Penjelasan modifikasi secara geometri. (40)	40
	Siswa menjelaskan tiga aspek (30)	
	Siswa menjelaskan dua aspek (20)	
	Siswa menjelaskan satu aspek (10)	
Nilai-nilai pancasila	Refleksi dari kegiatan proyek terkait nilai-nilai Pancasila	20
Total Skor Maksimal		150

Pembahasan alternatif penyelesaian untuk soal-soal mari mencoba dapat disimak di Youtube chanel "geometri" yang dapat di akses di s.id/geometri

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-773-3 (jil.1)

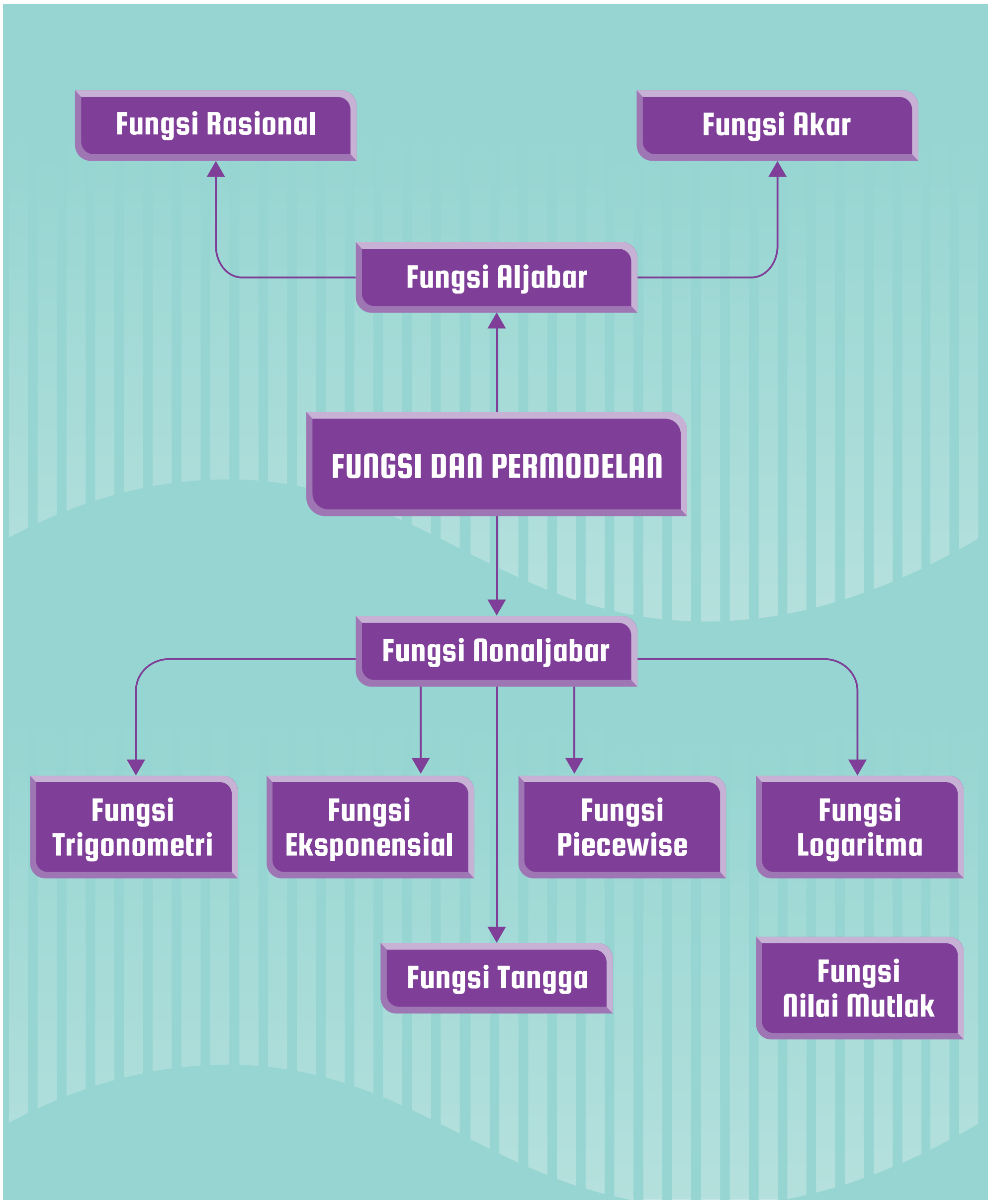
Bab 5
Fungsi dan Pemodelannya

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Menentukan nilai fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi aljabar dan fungsi non aljabar, serta menganalisis karakteristik grafiknya.
2. Memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi aljabar dan fungsi non aljabar.

A. Peta Konsep



Kata Kunci

Fungsi Aljabar, Fungsi Non-Aljabar, Fungsi Rasional, Fungsi Akar, Fungsi Trigonometri, Fungsi Logaritma, Fungsi Eksponensial, Fungsi *Piecewise*, Fungsi Nilai Mutlak, Fungsi Tangga.

B. Gambaran Umum

Bab ini membahas beberapa fungsi aljabar dan nonaljabar, serta penggunaannya untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Pembahasan dalam bab ini melengkapi pengetahuan dan keterampilan peserta didik sebelumnya mengenai fungsi dan pemodelannya. Sebelum mempelajari bab ini, peserta didik telah mengenal fungsi polinomial di bab 2. Agak ke belakang, peserta didik juga telah mempelajari fungsi eksponen dan fungsi kuadrat di kelas 10. Di jenjang SMP, peserta didik telah memiliki pengetahuan mengenai fungsi linear.

Di awal bab ini peserta didik diajak untuk mengenal fungsi-fungsi trigonometri dan grafiknya. Dengan menggunakan pengetahuan terkait perbandingan trigonometri segitiga siku-siku, peserta didik diajak untuk menemukan strategi bagaimana menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri sembarang sudut. Selain itu, peserta didik juga dipandu untuk menemukan dan mempelajari identitas-identitas trigonometri dasar. Identitas-identitas tersebut digunakan untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri. Setelah itu, peserta didik dikenalkan dengan grafik fungsi trigonometri beserta dengan amplitudo, periode, dan garis tengahnya. Semua yang dipelajari tersebut kemudian digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan fungsi trigonometri.

Pada subbab B, peserta didik akan mempelajari fungsi logaritma dan pemodelannya. Peserta didik diajak mengenal fungsi logaritma, menentukan daerah hasil dan daerah asalnya, serta peserta didik diajak menggambar grafik fungsi logaritma. Memanfaatkan grafik fungsi logaritma, peserta didik akan mempelajari sifat-sifat yang berlaku pada fungsi logaritma. Semua yang dipelajari tersebut dapat digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan logaritma.

Pada subbab C peserta didik akan mempelajari Fungsi Rasional dan Fungsi Akar. Peserta didik diajak mengenal fungsi rasional, menentukan daerah hasil dan daerah asal fungsi rasional, menentukan asimtot vertikal, asimtot tegak, dan asimtot miring, serta peserta didik diajak menggambar grafik fungsi rasional. Semua yang dipelajari dapat digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan fungsi rasional. Selain mempelajari fungsi rasional, pada subbab C peserta didik juga diajak mempelajari fungsi lain, yaitu fungsi akar. Untuk mempelajari fungsi akar diawali dengan mengenalkan peserta didik fungsi akar,

kemudian menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi akar, serta menggambar grafik fungsi akar. Peserta didik juga diajak untuk memodelkan dan menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan fungsi akar.

Pada subbab terakhir, siswa akan dibimbing untuk belajar beberapa fungsi nonaljabar yang meliputi fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi *piecewise*. Guru diharapkan dapat membimbing siswa untuk memahami definisi dari fungsi-fungsi tersebut dan mencermati beberapa karakteristik fungsi-fungsi tersebut. Setelah itu, siswa diajak untuk menelaah beberapa contoh pemodelan dengan menggunakan fungsi-fungsi tersebut. Selanjutnya, siswa akan diajak untuk mencoba sendiri pemodelan yang serupa dengan contoh-contoh tersebut.

C. Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Fungsi Trigonometri	15	1. Menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang sudut. 2. Menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri. 3. Menentukan amplitudo dan periode fungsi-fungsi trigonometri dan menggunakannya untuk mensketsa grafik fungsi-fungsi trigonometri tersebut. 4. Memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri.	1. Fungsi trigonometri 2. Identitas trigonometri 3. Grafik fungsi trigonometri	Fungsi trigonometri, identitas trigonometri, amplitudo, garis tengah, periode, sudut	Penemuan terbimbing, diskusi	Buku Siswa	

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
Fungsi Logaritma	13	1. Memahami pengertian fungsi logaritma 2. Menggambar grafik fungsi logaritma 3. Memahami sifat-sifat fungsi logaritma 4. Memodelkan permasalahan sehari-hari dengan fungsi logaritma	1. Pengertian fungsi logaritma 2. Grafik fungsi logaritma 3. Sifat-sifat fungsi logaritma 4. Pemodelan fungsi logaritma	Fungsi logaritma; grafik fungsi; identitas logaritma; pemodelan	• Ekspositori • Eksplorasi • Diskusi	Buku Siswa	Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2020. Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK Kelas X. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud
Fungsi aljabar	9	1. menjelaskan definisi fungsi rasional; 2. menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional; 3. menentukan asimtot fungsi rasional; 4. menggambar grafik fungsi rasional; 5. memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual dengan menggunakan fungsi rasional;	Fungsi akar	Fungsi akar	• Ekspositori	Buku Siswa	

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan Pembelajaran	Pokok Materi	Kata/Frasa Kunci	Metode dan Aktivitas Pembelajaran	Sumber Utama	Sumber Lain
		6. menjelaskan definisi fungsi akar; 7. menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi akar; 8. menggambar grafik fungsi akar; 9. memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual dengan menggunakan fungsi akar;					
Fungsi Non Aljabar	13	1. Memahami konsep fungsi eksponensial, nilai mutlak, tangga, dan *piecewise* serta menganalisis karakteristik grafiknya. 2. Memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi eksponensial, nilai mutlak, tangga, dan *piecewise.*	1. Fungsi Eksponensial 2. Fungsi Nilai Mutlak 3. Fungsi Tangga 4. Fungsi *Piecewise*	Eksponen, nilai mutlak, interval, daerah asal, daerah hasil, pemodelan	Diskusi, ekspositori	Buku Siswa	

D. Panduan Pembelajaran: Fungsi Trigonometri

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Fungsi Trigonometri dibagi menjadi empat aktivitas pembelajaran. Tujuan utama aktivitas pertama adalah untuk memandu peserta didik menggunakan pengetahuan awalnya mengenai perbandingan trigonometri untuk menentukan koordinat titik pada lingkaran satuan. Di aktivitas kedua, peserta didik diminta untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri sembarang sudut dengan menggunakan bantuan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku dan definisi fungsi-fungsi trigonometri. Di aktivitas ketiga, peserta didik diajak untuk menemukan identitas trigonometri dasar dan menggunakannya untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri. Di aktivitas keempat, peserta didik secara terbimbing dipandu untuk menggambar grafik fungsi trigonometri dan menganalisis karakteristiknya, yaitu terkait amplitudo dan periode. Di aktivitas terakhir, peserta didik memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Fungsi Trigonometri, peserta didik diharapkan mampu untuk melakukan hal-hal berikut.

1. Menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang sudut.
2. Menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri.
3. Menentukan amplitudo, periode, dan garis tengah fungsi-fungsi trigonometri dan menggunakannya untuk mensketsa grafik fungsi-fungsi trigonometri tersebut.
4. Memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri.

b. Alat dan Bahan

- Kertas berpetak atau kertas gambar
- Visualisasi bagian Matematika dan Sains “Gelombang Pasut Menyelamatkan Kapal yang Tersangkut” (tidak wajib)
- Kalkulator grafik Desmos (tidak wajib)

c. Persiapan Guru

Pertanyaan-pertanyaan berikut sebaiknya dipikirkan terlebih dahulu sebelum memulai pembelajaran pada subbab Fungsi Trigonometri.

- Bagaimana cara Anda menjembatani pengetahuan awal peserta didik tentang perbandingan trigonometri segitiga siku-siku dengan fungsi trigonometri untuk sembarang sudut?
- Bagaimana Anda menggunakan konteks-konteks dalam Buku Siswa, yaitu terbit dan tenggelamnya matahari serta gelombang pasang surut, untuk membantu peserta didik memahami fungsi-fungsi trigonometri?
- Miskonsepsi apa saja yang mungkin akan dilakukan peserta didik ketika mempelajari fungsi trigonometri?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Di kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat bercerita tentang fenomena terbit dan tenggelamnya matahari terhadap cakrawala. Setelah itu, fokuskan cerita tersebut kepada fakta bahwa posisi matahari yang berubah-ubah terhadap cakrawala setiap waktunya. Di akhir cerita tersebut, mintalah peserta didik untuk mencermati kegiatan eksplorasi "Posisi Matahari terhadap Garis Cakrawala" untuk kemudian menjawab pertanyaan-pertanyaan di kegiatan tersebut. Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, berilah peserta didik waktu beberapa menit terlebih dahulu untuk berpikir.

Eksplorasi — Posisi Matahari terhadap Cakrawala

Alternatif Penyelesaian

Jawaban dan alasan dapat bervariasi. Meskipun demikian, Bapak/Ibu guru perlu menegaskan beberapa hal berikut.

- Kurva halus pada gambar tersebut merepresentasikan posisi matahari terhadap cakrawala setiap waktunya. Ketika pagi sampai sore hari, posisi matahari berada di atas cakrawala. Ketika malam sampai dini hari, matahari terletak di bawah cakrawala.
- Fenomena terbit dan tenggelamnya matahari terhadap cakrawala terjadi setiap harinya. Oleh karena itu, jika gambarnya dilanjutkan, kurva pada gambar tersebut menampakkan pola yang periodik. Pola yang sama juga

akan dijumpai pada fungsi trigonometri yang akan dibahas pada aktivitas selanjutnya.

Di akhir kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk menyampaikan gagasannya sehingga terjadi diskusi secara klasikal. Dalam diskusi tersebut, peran Bapak/Ibu guru adalah menghubungkan gagasan-gagasan tersebut dengan karakteristik fungsi trigonometri yang akan dibahas pada aktivitas pembelajaran selanjutnya. Salah satu karakteristik yang dipilih, misalnya, adalah karakteristik fungsi trigonometri yang periodik.

b. Aktivitas 1

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku, yaitu tentang bagaimana menentukan nilai dari sin θ, cos θ, dan tan θ. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3–4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menentukan Koordinat Titik pada Lingkaran Satuan".

Eksplorasi—Menentukan Koordinat Titik pada Lingkaran Satuan

Alternatif Penyelesaian

1. Koordinat titik dapat A ditentukan dengan cara berikut.

   $x_A = 1 \cdot \cos 30^\circ = 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $y_A = 1 \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   Dengan demikian, koordinat titik A adalah $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

   Koordinat titik B dapat ditentukan dengan cara yang serupa dengan sebelumnya. Akan tetapi, perlu diperhatikan bahwa karena titik B berada di kuadran 2, maka koordinat x titik B negatif. Selain itu, sudut dalam segitiga siku-siku pada kuadran 2 juga perlu ditentukan terlebih dahulu. Misalkan sudut tersebut adalah $\bar{\theta}$, maka besar sudut ini adalah sebagai berikut.

   $x_B = -(1 \cdot \cos 45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   $y_B = 1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   Selanjutnya, koordinat titik B dapat ditentukan seperti berikut.

   $x_B = -(1 \cdot \cos 45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   $y_B = 1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   Dengan demikian, koordinat titik B adalah $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Koordinat titik C dan D dapat ditentukan dengan cara yang serupa seperti penentuan titik B, yaitu dengan menentukan sudut dalam segitiga siku-siku yang bersesuaian terlebih dahulu dan menggunakan perbandingan trigonometri sinus dan cosinus. Dengan cara seperti ini, dapat ditunjukkan bahwa koordinat titik C dan D secara berturut-turut adalah $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ dan $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

2. Koordinat suatu titik pada lingkaran satuan dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$x = \pm(1 \cdot \cos\bar{\theta}) \text{ dan } y = \pm(1 \cdot \sin\bar{\theta})$$

dengan $\bar{\theta}$ adalah sudut dalam segitiga siku-siku yang bersesuaian. Tanda positif atau negatif dari koordinat x dan y tersebut menyesuaikan posisi titik tersebut pada bidang koordinat.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menentukan koordinat titik pada lingkaran satuan, kemungkinan banyak peserta didik yang tidak mempertimbangkan tanda positif atau negatifnya. Oleh karena itu, penting bagi Bapak/Ibu guru untuk mengingatkan peserta didik tentang tanda koordinat x dan y di setiap kuadran. Di kuadran 1, koordinat x dan y keduanya positif. Di kuadran 2, koordinat x negatif sedangkan koordinat y positif. Di kuadran 3, koordinat x dan y keduanya negatif. Terakhir, di kuadran 4, koordinat x positif sedangkan y negatif.

Di akhir diskusi tersebut, Bapak/Ibu guru perlu menegaskan bahwa koordinat titik-titik pada lingkaran satuan dalam aktivitas eksplorasi dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$x = \pm(1 \cdot \cos\bar{\theta}) \text{ dan } y = \pm(1 \cdot \sin\bar{\theta})$$

Karena nilai 1 pada persamaan tersebut adalah jari-jari, atau r, dari lingkaran satuan, kemudian diskusikan dengan semua peserta didik mengapa persamaan-persamaan sebelumnya dapat dituliskan kembali menjadi persamaan-persamaan berikut ini.

$\pm\cos\bar{\theta} = \frac{x}{r}$ dan $\pm\sin\bar{\theta} = \frac{y}{r}$.

Jelaskan kepada peserta didik bahwa kedua persamaan tersebut selanjutnya digunakan untuk menggeneralisasi perbandingan trigonometri yang telah peserta didik dapat di kelas 10 menjadi definisi fungsi trigonometri dalam Definisi 5.1 pada Buku Siswa.

c. Aktivitas 2

Bapak/Ibu guru dapat memulai dua Aktivitas dengan mengajak peserta didik menyelidiki tanda (positif atau negatif) fungsi sinus, cosinus, dan tangen pada setiap kuadran di dalam bidang koordinat. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok dan tugaskan setiap kelompok untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri". Ketika peserta didik mengerjakan eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu guru perlu berkeliling dari satu kelompok ke kelompok lainnya untuk memantau dan mendampingi pekerjaan setiap kelompok.

Eksplorasi—Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

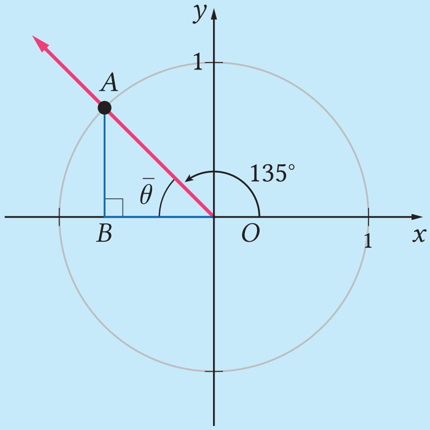
Alternatif Penyelesaian

1. Nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut θ = 0°, 90°, 180°, dan 270° dapat ditentukan dengan terlebih dahulu memilih satu titik pada sisi akhir setiap sudut tersebut. Dengan memilih titik (1, 0), (0, 1), (−1, 0), dan (0, −1) yang secara berturut-turut berada pada sisi akhir θ = 0°, 90°, 180° dan 270°, diperoleh nilai sin θ, cos θ, dan tan θ sebagai berikut.

Sudut θ	sin θ	cos θ	tan θ
0°	0	1	0
90°	1	0	–
180°	0	−1	0
270°	−1	0	–

2. Nilai sin θ, cos θ, dan tan θ dari sudut θ = 135° dapat ditentukan sebagai berikut.

(a) Sudut 135° ditunjukkan oleh gambar berikut.



(b) $\bar{\theta} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

(c) Dengan menggunakan cara pada Aktivitas 1 dalam subbab ini, koordinat A dapat ditentukan sebagai berikut.

$x = -(r \cdot \cos\bar{\theta}) = -(1 \cdot \cos 45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y = r \cdot \sin\bar{\theta} = 1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dengan demikian, koordinat A adalah $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

(d) Karena r adalah jari-jari lingkaran satuan, maka $r = 1$. Selain itu, r juga dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema Pythagoras.

$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

Nilai sin 135°, cos 135°, dan tan 135° dapat ditentukan seperti berikut.

$$\sin 135^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 135^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$$

3. Nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut θ = 240° dan −45° dapat ditentukan dengan cara yang serupa seperti nomor 2.

$$\sin 240^\circ = \frac{y_{240^\circ}}{r_{240^\circ}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 240^\circ = \frac{x_{240^\circ}}{r_{240^\circ}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{y_{240^\circ}}{x_{240^\circ}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sin(-45^\circ) = \frac{y_{-45^\circ}}{r_{-45^\circ}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos(-45^\circ) = \frac{x_{-45^\circ}}{r_{-45^\circ}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan(-45^\circ) = \frac{y_{-45^\circ}}{x_{-45^\circ}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$$

4. Dengan menggunakan cara yang serupa seperti nomor 2 dan 3, nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut θ = 390° dan −600° adalah sebagai berikut.

   $\sin 390^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos 390^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad$ $\tan 390^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

   $\sin(-600^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad$ $\cos(-600^\circ) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\tan(-600^\circ) = -\sqrt{3}$

5. Nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut θ = 945° dan −1.110° adalah sebagai berikut.

   $\sin 945^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $\cos 945^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $\tan 945^\circ = 1$

   $\sin(-1.110^\circ) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos(-1.110^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad$ $\tan(-1.110^\circ) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

6. Prosedur umum untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang sudut θ adalah sebagai berikut.
   (a) Cari sudut lancip $\bar{\theta}$, yaitu sudut yang salah satu kakinya adalah sumbu X dan kaki lainnya adalah sisi akhir dari θ.
   (b) Tentukan nilai $\sin\bar{\theta}$, $\cos\bar{\theta}$, atau $\tan\bar{\theta}$.
   (c) Nilai sin θ, cos θ, dan tan θ sama dengan nilai fungsi-fungsi trigonometri yang bersesuaian di bagian (b), tetapi dengan melakukan penyesuaian tandanya, positif atau negatif.

Setelah setiap kelompok menyelesaikan pekerjaannya, Bapak/Ibu guru selanjutnya memilih beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Setelah presentasi, ajaklah peserta didik mendiskusikan jawaban. Peran Bapak/Ibu guru di sini adalah mengarahkan diskusi agar berjalan secara produktif dan, jika perlu, meluruskan miskonsepsi atau kesalahan yang dialami peserta didik.

Bapak/Ibu guru selanjutnya dapat menghubungkan hasil diskusi peserta didik dengan Sifat 5.1. Jelaskan bahwa poin-poin dalam Sifat 5.1 tersebut dapat digunakan peserta didik untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri sembarang sudut. Tegaskan juga bahwa poin-poin dalam Sifat 5.1 tersebut sebenarnya telah ditemukan oleh peserta didik ketika mengerjakan aktivitas eksplorasi.

Kegiatan pembelajaran dilanjutkan dengan membaca Contoh 5.1 dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut. Untuk melakukannya,

Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik membaca contoh tersebut secara mandiri atau menjelaskannya secara langsung kepada peserta didik. Setelah itu, tugaskan peserta didik mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam Contoh 5.1 tersebut secara mandiri.

Mari, Mencoba 5.1

Alternatif Penyelesaian

Nilai cos(−60°) dapat ditentukan dengan menggunakan salah satu poin dalam Sifat 5.1, yaitu $\cos(-\bar{\theta}) = \cos\bar{\theta}$.

$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Nilai sin 450° dapat ditentukan dengan menggunakan fakta bahwa 450° = 1 · 360° + 90°.

$\sin 450^\circ = \sin(1 \cdot 360^\circ + 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

Karena −1215° = −6 · 180° + (−135°), maka nilai tan(−1215°) dapat ditentukan seperti berikut.

$\tan(-1215^\circ)$	$= \tan(-6 \cdot 180 + [-135^\circ])$	−1215° = −6 · 180° + (−135°)
	$= \tan(-135^\circ)$	Sifat 5.1
	$= -\tan 135^\circ$	Sifat 5.1
	$= -\tan(180^\circ - 45^\circ)$	135° = 180° − 45°
	$= -(-\tan 45^\circ)$	Sifat 5.1
	$= 1$	tan 45° = 1

Jadi, $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$, sin 450° = 1, dan tan(−1215°) = 1.

Setelah peserta didik menyelesaikan bagian Mari, Mencoba pada Contoh 5.1, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mempresentasikan jawabannya. Dalam presentasi tersebut, undanglah juga peserta didik-peserta didik lainnya untuk mengomentari jawaban temannya tersebut. Di akhir, Bapak/Ibu guru perlu memberikan konfirmasi terhadap jawaban peserta didik-peserta didik yang melakukan presentasi.

Antisipasi Miskonsepsi

Beberapa peserta didik mungkin masih mengalami miskonsepsi ketika mengerjakan soal-soal dalam bagian Mari, Mencoba pada Contoh 5.1. Misalnya, peserta didik mungkin akan mengalami kesalahan dalam memberikan tanda positif atau negatif pada nilai fungsi trigonometri. Untuk itu, Bapak/Ibu guru perlu mengingatkan peserta didik untuk selalu menganalisis sudut yang diberikan terletak di kuadran mana.

d. Aktivitas 3

Bapak/Ibu guru dapat memulai aktivitas ketiga dengan menjelaskan apa yang dimaksud dengan suatu identitas trigonometri, yaitu persamaan trigonometri yang selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan nilai variabelnya. Penjelasan ini dapat dimulai dengan mengingatkan kepada peserta didik bahwa identitas yang dimaksud dalam subbab ini sama dengan identitas yang telah mereka pelajari di Bab 2 Polinomial.

Setelah menjelaskan pengertian identitas trigonometri, Bapak/Ibu guru selanjutnya dapat meminta peserta didik untuk berpasangan dan mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menemukan Identitas Trigonometri". Ketika peserta didik mengerjakan aktivitas eksplorasi ini, berkunjunglah ke bangku peserta didik untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.

Eksplorasi Menemukan Identitas Trigonometri

Alternatif Penyelesaian

1. Kita akan menunjukkan bahwa panjang sisi di depan dan di samping sudut θ secara berturut-turut adalah sin θ dan cos θ. Untuk melakukannya, kita gunakan perbandingan trigonometri untuk segitiga siku-siku.

   $$\sin\theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$$

   $$\sin\theta = \frac{\text{depan}}{1}$$

   $$\text{depan} = 1 \cdot \sin\theta = \sin\theta$$

   Panjang sisi di samping sudut θ dapat ditentukan seperti berikut.

$\cos\theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$

$\cos\theta = \frac{\text{samping}}{1}$

samping $= 1 \cdot \cos\theta = \cos\theta$

Jadi, informasi yang diberikan semuanya tepat.

2. Karena segitiga yang diberikan merupakan segitiga siku-siku, maka kita dapat menggunakan Teorema Pythagoras.

   miring^2 = depan^2 + samping^2

   $1^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

   $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

3. Akan ditunjukkan bahwa $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ untuk sembarang sudut θ.

   (a) Koordinat titik P dapat ditentukan dengan menggunakan definisi fungsi trigonometri. Karena titik P berada pada lingkaran satuan, maka $r = 1$. Koordinat x titik tersebut dapat ditentukan seperti berikut.

   $\cos\theta = \frac{x}{r}$

   $x = r\cos\theta = 1 \cdot \cos\theta = \cos\theta$

   Koordinat y titik P dapat ditentukan sebagai berikut.

   $\sin\theta = \frac{y}{r}$

   $y = r\sin\theta = 1 \cdot \sin\theta = \sin\theta$

   Dengan demikian, koordinat titik P adalah $(\cos\theta, \sin\theta)$. Karena titik P berada di lingkaran satuan, maka jarak titik ini terhadap titik asal adalah 1. Padahal, jarak ini juga dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema Pythagoras, $x^2 + y^2 = r^2$.

   $x^2 + y^2 = r^2$

   $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$

   $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

   Jadi, terbukti bahwa $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ untuk sembarang sudut θ.

Setelah peserta didik menyelesaikan pengerjaannya, mintalah dua peserta didik untuk menunjukkan hasil pekerjaannya di depan kelas. Satu peserta didik menunjukkan pengerjaan nomor 1 dan 2, sedangkan satu peserta didik lainnya menunjukkan pengerjaan nomor 3. Setelah kedua peserta didik tersebut menunjukkan dan mempresentasikan hasil pekerjaannya, ajaklah peserta didik-peserta didik lainnya untuk memberikan tanggapan dan pertanyaan. Setelah itu, Bapak/Ibu guru perlu mengkonfirmasi jawaban yang tepat dari aktivitas eksplorasi tersebut.

Bapak/Ibu guru perlu melanjutkan pembelajaran dengan menjelaskan Sifat 5.2. Sifat ini memuat beberapa identitas trigonometri dasar yang penting untuk dikuasai oleh peserta didik. Setelah itu, mintalah peserta didik secara mandiri mencermati Contoh 5.2 dan mengerjakan bagian Mari, Mencoba di contoh tersebut. Selama peserta didik mengerjakan bagian Mari, Mencoba, doronglah mereka untuk berdiskusi dengan temannya jika mengalami kesulitan.

Mari, Mencoba 5.2

Alternatif Penyelesaian

Kita gunakan identitas Pythagoras untuk menentukan nilai sin θ.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{Identitas Pythagoras}$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad \text{Kurangi kedua ruas dengan } \cos^2\theta$$
$$\sin^2\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad \text{Akarkan}$$
$$\sin^2\theta = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13} \quad \text{Sederhanakan}$$

Karena $270° < \theta < 360°$, maka nilai sin θ negatif. Dengan demikian sin $\theta = -\frac{5}{13}$.

Selanjutnya, nilai tan θ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-5/13}{12/13} = -\frac{5}{12}$$

Bapak/Ibu guru selanjutnya perlu meminta salah satu peserta didik untuk mempresentasikan pengerjaannya dan meminta peserta didik-peserta didik lainnya untuk menanggapi. Setelah itu, berikan penegasan terhadap diskusi tersebut dan beri tahu peserta didik bahwa terdapat cara lain untuk mengerjakan Contoh 5.2 dan Mari, Mencoba di contoh tersebut. Berangkat dari sini, mintalah peserta didik untuk mengerjakan soal dalam Mari Berpikir Kreatif.

Mari Berpikir Kreatif

Alternatif Penyelesaian

Misalkan θ berada pada posisi baku, dan misalkan titik $P(x, y)$ berada pada sisi akhir sudut θ tersebut. Karena cos $\theta = \frac{12}{13}$ dan cos $\theta = \frac{x}{r}$, maka salah satu nilai

x dan r adalah x = 12 dan r = 13. Selanjutnya kita tentukan y dengan Teorema Pythagoras.

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm\sqrt{13^2 - 12^2} = \pm\, 5$$

Karena 270° < θ < 360°, maka y negatif, yaitu y = −5. Dengan demikian, nilai sin θ dan tan θ dapat ditentukan seperti berikut.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} = -\frac{5}{12}$$

Setelah ada beberapa peserta didik yang menyelesaikan soal Mari, Berpikir Kreatif, Bapak/Ibu guru dapat mengundang satu peserta didik secara sukarela untuk mengerjakan soal tersebut. Jika perlu, berikan nilai tambahan bagi peserta didik yang mengerjakan dan mempresentasikan pengerjaannya terhadap soal Mari, Berpikir Kreatif tersebut.

e. Aktivitas 4

Bapak/Ibu guru dapat memulai kegiatan keempat dengan mengenalkan ukuran sudut radian dan menjelaskan bagaimana mengkonversi ukuran sudut dari derajat ke radian, demikian juga sebaliknya. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menggambar Grafik y = sin x dan y = cos x". Selama peserta didik mengerjakan aktivitas tersebut, Bapak/Ibu guru sebaiknya mengunjungi setiap kelompok untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.

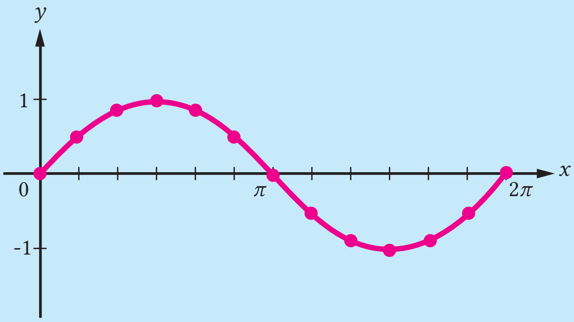
Eksplorasi—Menggambar Grafik y = sin x dan y = cos x

Alternatif Penyelesaian

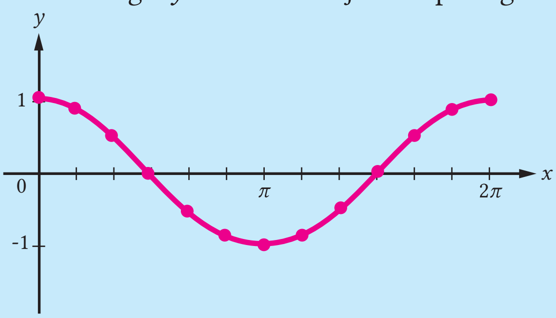
1. Berikut ini adalah tabel nilai-nilai fungsi y = sin x dan y = cos x yang sudah dilengkapi.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2. Grafik fungsi $y = \sin x$ ditunjukkan pada gambar berikut.



Grafik fungsi $y = \cos x$ ditunjukkan pada gambar berikut.



3. Grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ keduanya memiliki nilai maksimum 1 dan minimum -1. Dengan demikian, kedua fungsi tersebut memiliki amplitudo sama, yaitu $(1 - (-1))/2 = 1$.

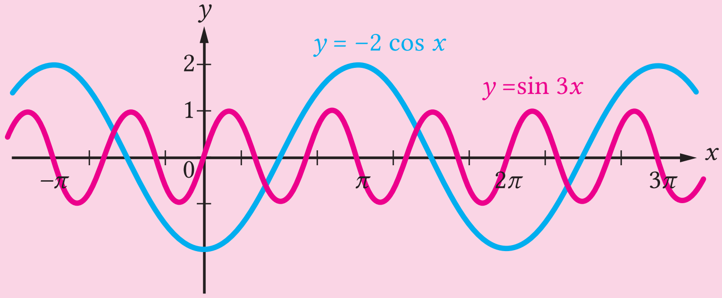
Setelah peserta didik menyelesaikan aktivitas eksplorasi, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Setelah kelompok tersebut selesai presentasi, ajaklah peserta didik-peserta didik lain untuk menanggapi jawaban kelompok presenter tersebut. Setelah itu, Bapak/Ibu guru perlu memberikan penegasan mengenai karakteristik grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, kemudian dilanjutkan dengan grafik $y = \tan x$.

Bapak/Ibu guru selanjutnya perlu menjelaskan konsep amplitudo dan periode dari fungsi-fungsi trigonometri dan bagaimana menentukannya. Penjelasan dapat mengacu pada Sifat 5.3. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati Contoh 5.3 dan mengerjakan Mari, Mencoba dalam contoh tersebut secara mandiri.

Mari, Mencoba 5.3

Alternatif Penyelesaian

Grafik $y = \sin 3x$ memiliki amplitudo 1 dan periode $\frac{2}{3}\pi$ sedangkan grafik $y = -2 \cos x$ memiliki amplitudo 2 dan periode 2π. Grafik kedua fungsi ini ditunjukkan pada gambar berikut.



Setelah peserta didik menyelesaikan pengerjaan bagian Mari, Mencoba, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk salah satu peserta didik untuk mempresentaikan jawabannya dan meminta peserta didik-peserta didik lainnya untuk memberikan komentar.

Alternatif Pembelajaran

Di Aktivitas 4, peserta didik diharapkan mampu untuk mengidentifikasi karakteristik grafik fungsi trigonometri. Sebagai alternatif untuk mencapai tujuan tersebut, Bapak/Ibu guru dapat menggunakan aktivitas pembelajaran interaktif di https://s.id/AltTrigonometri.

Aktivitas pembelajaran tersebut memandu peserta didik untuk mempu menggambar grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan konteks permainan kincir ria.

f. Aktivitas 5

Di awal pembelajaran, Bapak/Ibu guru dapat bercerita menggunakan kolom Matematika dan Sains yang berjudul "Gelombang Pasut Menyelamatkan Kapal yang Tersangkut" untuk menunjukkan kegunaan fungsi trigonometri. Jika memungkinkan, dampingi cerita tersebut dengan visualisasi yang menarik. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati Contoh 5.4 dan kemudian mengerjakan bagian Mari, Mencoba dalam contoh tersebut. Selama peserta didik mengerjakannya, Bapak/Ibu guru perlu memeriksa pekerjaan peserta didik dengan berkunjung dari satu bangku ke bangku lainnya.

Mari, Mencoba 5.4

Alternatif Penyelesaian

(a) Kita akan menentukan fungsi $y = a \cos bx$ yang grafiknya ditunjukkan pada Gambar 5.15. Karena jarak antara pasang tertinggi dan surut terendah di hari itu adalah 0,9, sehingga amplitudonya adalah 0,9/2 = 0,45. Dengan demikian, a = 0,45. Berdasarkan Gambar 5.15, selisih waktu dua puncak pasangnya adalah 12 jam, sehingga periodenya 12. Oleh karena itu, b = π/6. Jadi, fungsi tersebut adalah $y = 0,45 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

(b) Kita cari nilai y ketika x = 7.

$$y = 0,45\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 7\right) = 0,45\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -0,225\sqrt{3} \approx -0,3897$$

Jadi, ketinggian permukaan air laut Kota Ambon adalah sekitar 0,3897 di bawah ketinggian rata-ratanya.

Setelah peserta didik menyelesaikan soal dalam Mari, Mencoba, Bapak/Ibu guru perlu memilih dua atau lebih peserta didik yang memiliki cara atau hasil pengerjaan yang berbeda, kemudian mintalah peserta didik-peserta didik tersebut untuk mempresentasikan jawabannya. Setelah itu, ajaklah peserta didik-peserta didik lainnya untuk memberikan komentar terhadap jawaban presenter. Di akhir diskusi, Bapak/Ibu guru perlu memberikan penegasan dan, jika perlu, meluruskan miskonsepsi atau kesalahan peserta didik.

Bapak/Ibu guru selanjutnya perlu mengenalkan garis tengah dari grafik fungsi trigonometri, seperti yang dijelaskan di Sifat 5.4. Ketika mengenalkan garis tengah

tersebut, gunakan konteks yang telah dikenal peserta didik di Contoh 5.4. Tegaskan bahwa garis tengah tersebut sangat berguna untuk mensketsa grafik fungsi trigonometri.

g. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab fungsi trigonometri, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya adalah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana cara kalian menentukan nilai-nilai fungsi untuk sembarang sudut?
- Identitas-identitas trigonometri apa saja yang kalian ketahui? Bagaimana cara kalian menggunakan identitas-identitas tersebut untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri?
- Bagaimana kalian menggunakan amplitudo, periode, dan garis tengah untuk mensketsa grafik fungsi trigonometri?
- Permasalahan-permasalahan apa saja yang dapat dimodelkan dengan fungsi trigonometri?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami fungsi trigonometri, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan A nomor 11. Beri waktu 5 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Fungsi Trigonometri, mintalah peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa mulai nomor 1–4.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Nilai tan θ seharusnya adalah $5/(-2) = -5/2$.
2. Salah. Jika sin $\theta = 1/3$, sudut θ dapat berada di kuadran 1 atau 2.
3. $\cos^2 \theta$
4. 180° atau π
5. $|a|$; $2\pi/|b|$

6. Koordinat titik P adalah $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, sedangkan koordinat titik Q adalah $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

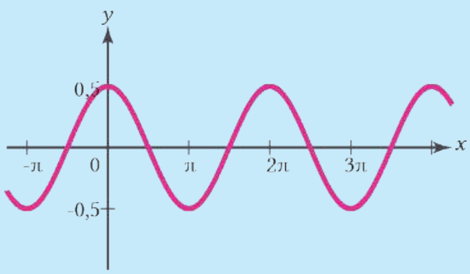
7. $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$, $\cos 225^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan $\tan 870^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

8. Akan dibuktikan bahwa $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) = \sin^2\theta$. Pembuktiannya dilakukan dari ruas kiri.

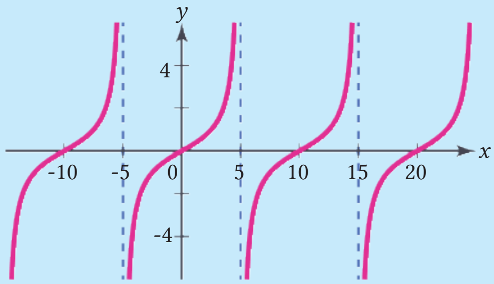
$$\begin{aligned}\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) &= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - (\cos\theta)(\cos\theta)\\ &= 1 - \cos^2\theta\\ &= \sin^2\theta\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) = \sin^2\theta$.

10. (a) Fungsi $y = \frac{1}{2}\cos x$ memiliki amplitudo ½ dan periode 2π. Grafiknya ditunjukkan pada gambar di bawah.



(b) Fungsi tidak memiliki amplitudo. Periodenya adalah 10. Grafiknya ditunjukkan pada gambar di bawah.

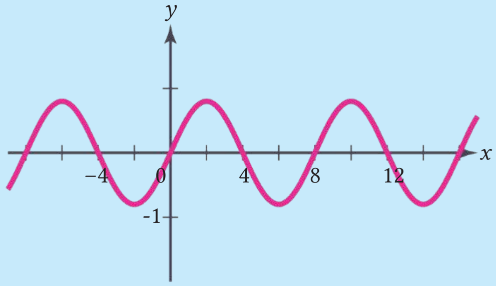


11. Grafik fungsi $y = 2\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ memiliki amplitudo 2 dan periode 2π. Dengan demikian, yang paling tepat adalah gambar milik Dona.

12. Misalkan y adalah ketinggian (dalam m) pelampung terhadap ketinggian rata-ratanya dan x adalah waktu (dalam detik).

(a) $y = 0{,}8\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

(b) Grafik fungsi ditunjukkan sebagai berikut.



(c) Ketinggian pelampung 9 detik setelah posisi awalnya adalah $0,4\sqrt{2}$ m atau sekitar 0,5657 m.

13. (a) $y = 25\cos\left(\frac{2\pi}{15}x\right)$

(b) Ketinggiannya adalah −25/2 m relatif terhadap pusat kincir ria.

(c) $y = 25\cos\left(\frac{2\pi}{15}x\right) + 27$

14 (a) Diameternya adalah 44 m.

(b) $(2\pi)/(\frac{\pi}{7}) = 14$ menit.

(c) Orang tersebut berada di titik tertinggi setelah 3,5 menit, 17,5 menit, dan 31,5 menit setelah kincir ria mulai berputar.

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal-soal Latihan A nomor 7, 8, 9, 10, 12, dan 14. Soal-soal tersebut diharapkan dapat menjaga dan mengembangkan pengetahuan dan pemahaman peserta didik mengenai fungsi trigonometri.

C. Panduan Pembelajaran: Fungsi Logaritma

1. Persiapan Pembelajaran

Pada subbab B tentang fungsi logaritma, kegiatannya dibagi menjadi beberapa aktivitas pembelajaran yang dinamakan aktivitas eksplorasi pada buku siswa. Tujuan utama aktivitas pertama adalah untuk memandu peserta didik menggunakan pengetahuan tentang fungsi ekpsonensial dan sifat logaritma yang telah dipelajari di kelas X untuk menentukan pengertian dari fungsi logaritma. Di aktivitas kedua, peserta didik diminta untuk menentukan nilai fungsi logaritma untuk titik-titik pada domain yang diberikan. Tujuan dari aktivitas kedua ini adalah untuk memandu

peserta didik menggambar grafik fungsi logaritma. Di aktivitas ketiga, peserta didik diajak untuk menemukan identitas fungsi logaritma dan menggunakannya untuk menentukan nilai logaritma. Di aktivitas terakhir, peserta didik memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi logaritma.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab fungsi logaritma, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan-kemampuan berikut:

1. menjelaskan pengertian fungsi logaritma;
2. menggambarkan grafik fungsi logaritma;
3. memahami sifat-sifat fungsi logaritma berdasarkan grafik fungsi logaritma;
4. menggunakan identitas-identitas logaritma untuk menentukan nilai fungsi-fungsi logaritma;
5. memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi logaritma.

b. Alat dan Bahan

- Kertas berpetak atau kertas gambar
- Tabel logaritma/kalkulator *scientific.*
- Kalkulator grafik Desmos

c. Persiapan Guru

Untuk mengawali pembelajaran pada subbab fungsi logaritma, Bapak/Ibu guru sebaiknya dipikirkan terlebih dahulu pertanyaan-pertanyaan berikut.

- Bagaimana cara menjembatani pengetahuan awal peserta didik tentang fungsi eksponensial dengan fungsi logaritma?
- Mengapa fungsi logaritma penting untuk dipelajari?
- Bagaimana keterkaitan fungsi eksponensial yang sudah dipelajari pada kelas X dengan fungsi logaritma?
- Miskonsepsi apa saja yang mungkin akan dilakukan peserta didik ketika mempelajari fungsi logaritma?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Dalam kegiatan pemanasan bertujuan untuk menarik perhatian keseluruhan peserta didik agar terarah ke dalam pembelajaran fungsi logaritma. Untuk mengawali pembelajaran di subbab ini, Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik mengingat kembali beberapa pertanyaan tentang materi-materi prasyarat untuk fungsi logaritma. Pertanyaan-pertanyaan tersebut misalnya seperti ini.

> *Apa yang kalian ingat tentang bentuk logaritma? Apakah ada keterkaitan antara bentuk logaritma dan bentuk eksponensial? Mengapa?*

Dalam kegiatan ini, ajak semua peserta didik untuk berpikir tentang materi-materi prasyarat tersebut. Jika perlu, undang salah satu atau beberapa peserta didik untuk mengelaborasi secara lebih jauh materi-materi prasyarat tersebut.

Kegiatan Dikegiatan pemanasan, Bapak/Ibu guru dapat bercerita tentang bagaimana penyebaran virus Covid-19 yang terjadi di Indonesia. Kegiatan ini bertujuan untuk mengenalkan fenomena sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan menggunakan fungsi logaritma. Setelah itu, fokuskan cerita tersebut kepada fakta perkembangan virus Covid-19 begitu pesat terjadi di Indonesia. Di akhir cerita tersebut, mintalah peserta didik untuk mencermati pertanyaan "bagaimana perkembangan virus Covid-19". Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, berilah peserta didik waktu beberapa menit terlebih dahulu untuk berpikir.

Bapak/Ibu guru diperbolehkan mengganti dengan cerita tentang masalah lainnya lainnya yang dikenal di daerah masing-masing, misalnya pertumbuhan suatu bakteri, atau pertumbuhan jumlah penduduk, dan sebagainya. Ajaklah peserta didik untuk mengetahui pentingnya memahami fungsi logaritma.

Kesimpulan Kegiatan pemanasan ini untuk memfasilitasi peserta didik membuat kesimpulan tentang pentingnya untuk mempelajari subbab ini, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa siswa untuk mempresentasikan tanggapan mereka kenapa pentingnya belajar fungsi logaritma.

b. Aktivitas 1

Tujuan dari aktivitas pertama adalah untuk mengajak peserta didik menemukan konsep fungsi logaritma.

Kegiatan Bentuklah kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan belajar efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan diajak untuk menemukan konsep fungsi logaritma. Setelah itu mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada peserta didik dalam mengumpulkan informasi yang relevan dari ide dengan diskusi kelompok untuk memecahkan masalah yang diberikan pada kegiatan eksplorasi. Pembentukan kelompok ini dapat Bapak/Ibu guru lakukan untuk aktivitas-aktivitas berikutnya pada subbab ini.

Eksplorasi—Pertumbuhan virus Covid-19

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui $P(t)$ = 50.000. Dengan memanfaatkan konsep keterkaitan antara bentuk ekponensial dan logaritma, yakni $50.000 = 2e^{\left(\frac{1}{60}\ln 5059\right)t}$ sehingga diperoleh $\ln 25000 = \left(\frac{1}{60}\ln 5059\right)t$. Akibatnya $t = \frac{60\times \ln 25000}{\ln 5059}$. Manfaatkan tabel logaritma atau kalkulator scientific diperoleh $t = \frac{60\times \ln 25000}{\ln 5059} \approx \frac{60\times 10,13}{8,53} \approx 71,25$ hari.
   Jadi dalam waktu sekitar 72 hari sekitar 50.000 orang yang terpapar virus Covid-19.
2. Dengan memanfaatkan konsep keterkaitan antara bentuk ekpsonensial dan logaritma, yakni $P(t) = e^{\left(\frac{1}{60}\ln 5059\right)t}$ sehingga diperoleh $\ln P(t) = \left(\frac{1}{60}\ln 5059\right)t$, sehingga diperoleh $t = \frac{60\times \ln P(t)}{\ln 5059}$.
   Jadi model waktu yang dibutuhkan terhadap banyaknya orang yang terpapar Covid-19 adalah $t = \frac{60\times \ln P(t)}{\ln 5059}$.

Untuk memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut. Kegiatan ini Bapak/Ibu guru dapat lakukan pada aktivitas-aktivitas selanjutnya.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika mengerjakan eksplorasi pertama, mungkin saja peserta didik mengalami kesalahan dalam perhitungan nilai logaritma. Oleh karena itu, guru dapat mengingatkan kepada peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan perhitungan. Kekeliruan lain yang dapat terjadi adalah kekeliruan dalam membulatkan hasil perhitungan logaritma. Terkait hal ini, ajukan pertanyaan-pertanyaan berikut ke kelas untuk memulai diskusi yakni *Bagaimana aturan membulatkan ke atas atau ke bawah*?

Bapak/Ibu guru dapat menugaskan peserta didik mencermati Contoh 5.5. Di akhir, ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai fungsi logaritma dengan mengerjakan mari mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.5.

Mari, Mencoba 5.5

Alternatif Penyelesaian

a. $f\left(\frac{1}{9}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{9} = 2$

b. $f\left(\frac{1}{27}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{27} = 3$

c. Aktivitas 2

Setelah memahami tentang fungsi logaritma pada aktivitas pertama, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan aktivitas kedua.

Kegiatan Tujuan aktivitas kedua adalah agar peserta didik dapat menggambar grafik fungsi logaritma dan memahami sifat-sifat dari fungsi logaritma dengan mengamati grafik fungsi logaritma.

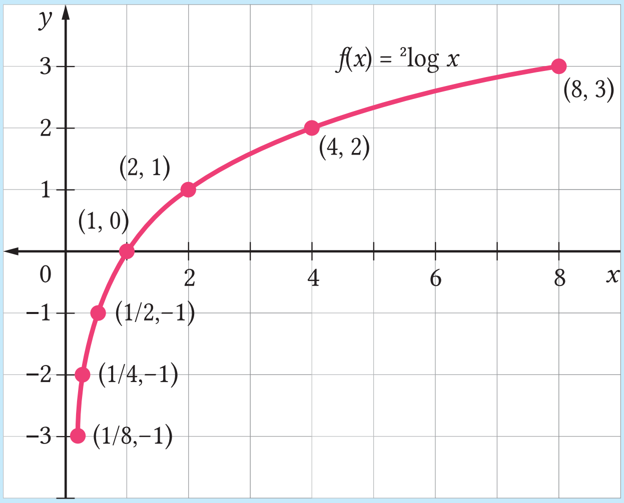
Eksplorasi—Menggambarkan Fungsi Logaritma

Alternatif Penyelesaian

1. Nilai $f(x)$ untuk x yang diberikan

x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

2. (8, 3), (4, 2), (2, 1), (1, 0), $\left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{4}, -2\right), \left(\frac{1}{8}, -3\right)$.
3. Hasil plot pada langkah 2 di Gambar 5.17



Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menggambarkan grafik fungsi mungkin saja peserta didik mengalami kesalahan dalam menggambarkan grafik fungsi logaritma dikarenakan salah perhitungan. Oleh karena itu, guru dapat mengingatkan kepada peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan perhitungan. Misalnya, kekeliruan dalam menghitung operasi pangkat. (contoh, mereka menganggap bahwa 2^3 sama dengan 2×3). Akibatnya, sketsa grafik mereka menjadi keliru. Selain itu, ingatkan ke peserta didik bahwa batas kiri dan kanan suatu grafik tidak harus sama dengan batas kiri dan kanan x yang dipilih (di aktivitas eksplorasi, batas kiri dan kanan x yang dipilih adalah 2^{-3} dan 2^3). Seperti di pekerjaan peserta didik tersebut, grafiknya hanya digambar mulai dari $x = 2^{-3}$ sampai $x = 2^3$. Di kesempatan ini, singgunglah domain dari fungsi logaritma yang merupakan himpunan semua bilangan real positif. Dengan demikian, grafik fungsi f harus digambar sesuai dengan domainnya ini. Kekeliruan lain dalam menggambar

grafik dapat terjadi kekeliruan grafiknya memotong sumbu-*Y*. Terkait hal ini, ajukan pertanyaan-pertanyaan berikut ke kelas untuk memulai diskusi.

Apakah grafik fungsi $f(x) = {}^2\log x$ *memotong sumbu-Y? Ataukah tidak mungkin? Mengapa?*

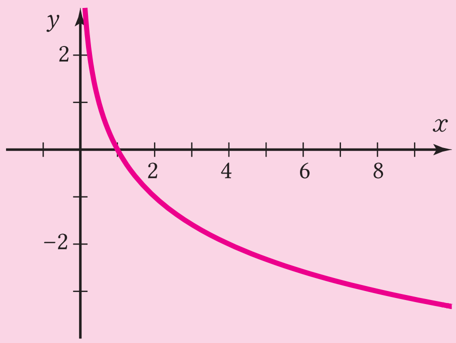
Di akhir diskusi tersebut, tegaskan bahwa grafik fungsi f tidak pernah memotong sumbu-Y karena nol tidak masuk domain f. Dengan kata lain, $f(0)$ tidak terdefinisi.

Bapak/Ibu guru dapat menugaskan peserta didik mencermati Contoh 5.6. Di akhir, ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya mengenai grafik fungsi logaritma dengan mengerjakan mari mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.6.

Mari, Mencoba 5.6

Alternatif Penyelesaian

Grafik fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$



Di akhir Aktivitas 2, Bapak/Ibu guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mengulas kembali pembelajaran yang telah dilakukan. Dalam ulasan ini, pertimbangkan untuk menanyakan beberapa pertanyaan panduan berikut.

- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian menggambar grafik fungsi logaritma?
- Apa perbedaan grafik fungsi eksponensial yang telah kalian pelajari di kelas X dengan grafik fungsi logaritma yang baru kalian pelajari?

c. Aktivitas 3

Melalui aktivitas ketiga, peserta didik diajak untuk menggunakan identitas-identitas ekponensial yang telah dipelajari pada kelas X untuk menentukan sifat-sifat dari fungsi logaritma. Aktivitas ketiga ini diawali dengan meminta siswa meninjau kembali sifat-sifat eksponen, kemudian dilanjutkan dengan menggunakan identitas tersebut menentukan identitas-identitas logaritma.

Kegiatan Bapak/Ibu guru dapat memulai aktivitas ketiga dengan menjelaskan apa yang dimaksud dengan suatu identitas logaritma, yaitu persamaan logaritma yang selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan nilai variabelnya. Penjelasan ini dapat dimulai dengan mengingatkan kepada peserta didik bahwa identitas yang dimaksud dalam subbab ini sama dengan identitas yang telah mereka pelajari di kelas X. Setelah menjelaskan pengertian identitas logaritma, Bapak/Ibu guru selanjutnya dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan aktivitas eksplorasi "Menemukan sifat-sifat logaritma". Ketika peserta didik mengerjakan aktivitas eksplorasi ini, berkunjunglah ke bangku peserta didik untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.

Eksplorasi—Menemukan Sifat-Sifat Logaritma

Alternatif Penyelesaian

1. Karena $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, berdasarkan definisi fungsi logaritma diperoleh ${}^a\log(a^m \cdot a^n) = m + n$. Jadi ${}^a\log(MN) = {}^a\log M + {}^a\log N$
2. Dengan menggunakan sifat bahwa $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Dengan menggunakan cara yang serupa di langkah 1, diperoleh ${}^a\log\left(\frac{M}{N}\right) = {}^a\log M - {}^a\log N$.
3. Gunakan sifat ${}^a\log(MN) = {}^a\log M + {}^a\log N$ sehingga diperoleh ${}^a\log M^p = {}^a\log(\underbrace{M \times M \times M \times \cdots M}_{p\ kali}) = {}^a\log M + \cdots + {}^a\log M = p\,{}^a\log M$

Setelah itu, mintalah peserta didik secara mandiri mencermati Sifat 5.7 dan mengerjakan bagian mari mencoba di Contoh 5.7. Selama peserta didik mengerjakan bagian mari mencoba, doronglah mereka untuk berdiskusi dengan temannya jika mengalami kesulitan.

Mari, Mencoba 5.7

Alternatif Penyelesaian

a. Karena $f(80)+f(y)=f(80y)=\ln 80y=4$ maka $80y = e^4$. Akibatnya $y=\frac{e^4}{80}\approx 0,68$

b. $f(18)={}^2\log 18={}^2\log 2\times 9={}^2\log 2+{}^2\log 3^2\approx 1+2(0,63)=2,26$

Selanjutnya, Bapak/Ibu guru perlu melanjutkan pembelajaran dengan menjelaskan Sifat 5.6. Sifat ini memuat beberapa identitas logaritma dasar yang penting untuk dikuasai oleh peserta didik.

Mari Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

1. Misalnya kita mengetahui nilai ${}^b\log x$ dan akan mencari nilai ${}^a\log x$. Untuk itu, kita misalkan $y = {}^a\log x$. Selanjutnya, tulislah bentuk $y = {}^a\log x$ ke dalam bentuk $a^y = x$. Operasikan ruas kiri dan ruas kanan bentuk $a^y = x$ dengan menggunakan logaritma basis b, yaitu ${}^b\log(a^y) = {}^b\log(x)$. Dengan menggunakan sifat-sifat logaritma, maka $y=\frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$.
2. Misalkan ${}^b\log M=x$ dan ${}^M\log c=y$ maka diperoleh $M = b^x$ dan $c = m^y$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}{}^b\log M\times{}^M\log c &= {}^b\log b^x\times{}^M\log M^y\\ &= y\,{}^b\log M\times{}^M\log M\\ &= y\,{}^b\log M={}^b\log M^y={}^b\log c\end{aligned}$$

Untuk pembuktikan Sifat 4 sampai 6 dapat memanfaatkan sifat 3 dan identitas eksponensial yang telah dipelajari pada kelas X.

Bapak/Ibu guru selanjutnya perlu meminta salah satu peserta didik untuk mempresentasikan pengerjaannya dan meminta peserta didik lainnya untuk menanggapi.

d. Aktivitas 4

Setelah memahami bagaimana sifat-sifat fungsi logaritma pada aktivitas ketiga, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan aktivitas keempat. Tujuan dari aktivitas kempat adalah untuk mengajak peserta didik memahami pemodelan dari fungsi logaritma.

Kegiatan Bapak/Ibu guru berilah penjelasan kepada peserta didik pemodelan fungsi logaritma. Ajaklah peserta didik menerapkan pengetahuan dan pemahamannya tentang pemodelan fungsi logaritma dengan mengerjakan mari mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.8.

Mari, Mencoba 5.8

Alternatif Penyelesaian

Waktu yang dibutuhkan untuk virus Covid-19 menjadi sebanyak dua juta virus Covid-19 adalah $t = \frac{\log(2.000.000/2)^2}{\log 2} = {}^{2}2\log 1.000.000 \approx 2(19,93) = 39,86$ jam.

Setelah peserta didik mengerjakan mencoba pada Contoh 5.8, tegaskan bahwa agar dapat menekan penyebaran virus Covid-19 maka kita perlu mengurangi interaksi secara langsung dengan orang lain harus tetap selalu berada di rumah. Selanjutnya agar pemahaman peserta didik tentang pemodelan fungsi logaritma lebih baik lagi, dapat meminta peserta didik mengerjakan Mari Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.9, 5.10, 5.11 dan 5.12. Contoh 5.9 memperlihatkan bagaimana penerapan logaritma dalam bidang informatika.

Mari, Mencoba 5.9

Alternatif Penyelesaian

Karena simbol yang tersedia ada 26 ($N = 26$) dan panjang kata sandi terdiri dari 3 huruf ($L = 3$) maka entropi dari kata sandi tersebut adalah $H = 3\frac{\log 26}{\log 2} = 14,1$ bit. Sehingga banyaknya pencarian yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan adalah $2^{6,64} = 17559,9 \approx 17560$ percobaan.

Selanjutnya, mari mencoba pada Contoh 5.10, memperlihatkan bagaimana pemodelan fungsi logaritma dalam gempa.

Mari, Mencoba 5.10

Alternatif Penyelesaian.

Karena intensitas gempanya $10^{9,3}$ kali daripada gempa tingkat nol, maka $I = 10^{9,3} I_0$. Dengan demikian, $R = \log \frac{I}{I_0} = \log \frac{10^{9,3} I_0}{I_0} = 9,3$. Jadi, gempa bumi di Lepas Pantai Aceh pada tahun 2004 tersebut memiliki kekuatan 9,3 skala Richter.

Setelah peserta didik mengerjakan mari mencoba pada Contoh 5.10. Mintalah peserta didik mengerjakan mari mencoba pada Contoh 5.11 tentang pemodelan mengisi daya baterai.

Mari, Mencoba 5.11

Alternatif Penyelesaian.

Karena baterai tersebut akan diisi dayanya sampai 80% penuh, maka $C = 80\% C_0 = 0,8C_0$. Dengan demikian, $t = -\frac{1}{k} \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right) = -\frac{1}{0,025} \ln\left(1 - \frac{0,8C_0}{C_0}\right) \approx 64,38$.
Jadi, waktu pengisian daya tersebut adalah sekitar 64,38 menit

Pada contoh terakhir dari pemodelan fungsi logaritma. Ajaklah peserta didik mengerjakan mari mencoba pada Contoh 5.12 tentang bagaimana penyusutan harga barang.

Mari, Mencoba 5.12

Alternatif Penyelesaian

Pemodelan Harga mobil setiap saat t pada Contoh 5.12 adalah $H(t) = 200e^{\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}\right)t} = 200e^{-0,173t}$. Jadi, harga mobil setelah 20 tahun digunakan adalah $H(20) = 200e^{-0,173(20)} = 6,29$ yaitu sekitar 6 juta.

Mintalah beberapa peserta didik untuk mengomunikasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang bagaimana pemodelan fungsi logaritma.

d. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendinginan dalam pembelajaran subbab fungsi logaritma, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya adalah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada peserta didik.

- Bagaimana cara kalian menentukan nilai-nilai fungsi logaritma?
- Bagaimana kalian menggunakan sifat eksponen untuk mensketsa grafik fungsi logaritma?
- Sifat-sifat fungsi logaritma apa saja yang kalian ketahui? Bagaimana cara kalian menggunakan sifat-sifat tersebut tersebut untuk menentukan nilai fungsi-fungsi logaritma?
- Permasalahan-permasalahan apa saja yang dapat dimodelkan dengan fungsi logaritma?

Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memahami fungsi logaritma, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan Latihan B nomor 1 dan 3 Beri waktu 5 sampai 10 menit bagi peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Fungsi Logaritma, mintalah peserta didik mengisi tabel Refleksi dalam Buku Siswa mulai nomor 1–4.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

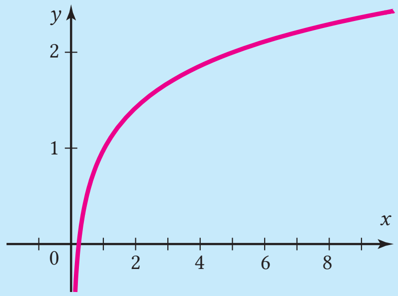
a. Latihan

Latihan B Fungsi Logaritma

Alternatif Penyelesaian

1. Daerah asal $\{x \mid x > 0\}$ dan range $\mathbb{R}$
2. Fungsi logaritma $f(x) = {}^5\log x$ memiliki basis 3. Dengan demikian, $f(1) = 0$, $f(5) = 1$, dan $f(25) = 2$

3. Sketsa grafik fungsi $g(x) = ({}^{5}\log x) + 1$ adalah:



dengan daerah asal $\{x \mid x > 0\}$, daerah hasil $\mathbb{R}$ dan asimtot tegaknya sumbu -Y

4. ${}^{5}\log\left(\frac{2013}{3}\right) = {}^{5}\log 2013 - {}^{5}\log 3$
5. *Salah.*
6. Intensitas gempa bumi yang terjadi di Aceh $(10^{9,3})/(10^{7,3}) = 10^{2} = 100$ kali lipat dari yang terjadi di Tasikmalaya
7. Nilai pH jus jeruk adalah pH = $-\log(10^{-3,15}) = -(-3,15)\log 10 = 3,15(1) = 3,15$. Jadi, nilai pH jus jeruk tersebut adalah sekitar 3,15.
8. $\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{h}{7}$ maka $\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{4,884}{7}$. Akibatnya $P = 100e^{-0,6977} \approx 49,77$ Jadi, tekanan udara di daerah tersebut adalah sekitar 49,77 kPa.
9. Ketinggian yang cocok dengan tubuh manusia adalah $h \leq 14,9$ km. Untuk menentukan tekanan yang masih cocok dengan manusia, maka kita selesaikan pertidaksamaan $\ln\left(\frac{P}{100}\right) \geq -\frac{14,9}{7}$. Dengan memanfaatkan sifat logaritma diperoleh $P \geq 100e^{-14,9/7} \approx 11,9$. Jadi, tekanan atmosfer yang aman bagi manusia minimal 11,9 kPa.
10. Waktu yang diperlukan agar populasinya mencapai satu juga bakteri adalah $t = 2\frac{\log(1.000.000/50)}{\log 2} \approx 28,57$ menit

b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal-soal Latihan B nomor 6 - 10. Soal-soal tersebut diharapkan dapat menjaga dan mengembangkan pengetahuan dan pemahaman peserta didik mengenai pemodelan fungsi logaritma.

D. Panduan Pembelajaran: Fungsi Aljabar

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Fungsi Aljabar melalui dua aktivitas pembelajaran, pada aktivitas pertama peserta didik dipandu oleh Bapak/Ibu guru untuk memodelkan dan menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan fungsi rasional, namun sebelum itu peserta didik diajak untuk memahami definisi fungsi rasional, menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional, menentukan asimtot dari fungsi rasional, serta menggambar grafik fungsi rasional. Di aktivitas kedua, mengajak peserta didik memahami definisi fungsi akar, menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi akar, dan menggambar grafik fungsi akar. Di akhir aktivitas kedua peserta didik diajak untuk memodelkan dan menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan fungsi akar.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Fungsi Aljabar, peserta didik diharapkan memiliki kemampuan-kemampuan berikut:

1. menjelaskan definisi fungsi rasional;
2. menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional;
3. menentukan asimtot fungsi rasional;
4. menggambar grafik fungsi rasional;
5. memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual dengan
6. menggunakan fungsi rasional;
7. menjelaskan definisi fungsi akar;
8. menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi akar;
9. menggambar grafik fungsi akar;
10. memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual dengan menggunakan fungsi akar;

b. Alat dan Bahan

1. kertas berpetak atau kertas gambar
2. kalkulator
3. kalkulator grafik

c. Persiapan Guru

Untuk mempersiapkan pembelajaran dalam subbab Fungsi Aljabar, Bapak/Ibu guru sebaiknya mempertimbangkan pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

- Bagaimana cara mengenalkan peserta didik tentang fungsi rasional?
- Bagaimana cara memandu peserta didik untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual dengan menggunakan fungsi rasional?
- Bagaimana cara mengenalkan peserta didik tentang fungsi akar?
- Bagaimana cara memandu peserta didik untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual dengan menggunakan fungsi akar?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Bapak/Ibu guru dapat memberikan peserta didik pertanyan-pertanyaan berikut ini untuk mengingat kembali materi yang telah dipelajari.

- Apa yang dimaksud dengan fungsi?
- Apa yang dimaksud dengan daerah asal dari suatu fungsi?
- Apa yang dimaksud dengan daerah hasil dari suatu fungsi?

Setelah itu, Bapak/Ibu guru dapat menuliskan suatu fungsi aljabar dan fungsi kuadrat kemudian Bapak/Ibu guru meminta peserta didik untuk menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi tersebut. Di akhir kegiatan pemanasan Bapak/Ibu guru dapat berikan motivasi kepada peserta didik pentingnya mempelajari fungsi aljabar misalnya menentukan jarak suatu benda ke *horizon*

Pertanyaan boleh Bapak/Ibu guru tambahkan sendiri. Diskusikan jawaban peserta didik dari pertanyaan tersebut, kemudian Bapak/Ibu guru dapat memberikan penegasan bahwa materi fungsi sebagai materi prasyarat untuk mempelajari fungsi rasional dan fungsi akar.

b. Aktivitas 1

Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik mengenal fungsi rasional dengan mencermati permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yaitu Petrus yang akan membuat kandang untuk ayam peliharaannya, kemudian jelaskan Definisi 5.3.

Untuk menjelaskan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional, Bapak/Ibu guru dapat menggunakan Contoh 5.13. Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik untuk membentuk kelompok kecil yang memungkinkan peserta didik dapat belajar efektif dan efisien. Setelah itu mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan soal pada Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.13.

Mari, Mencoba 5.13

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi rasional g adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Karena pembuat nol dari fungsi $x^2 - 1$ adalah -1 dan 1 , maka daerah asal fungsi rasional g adalah himpunan semua bilangan real kecuali -1 dan 1 atau dapat di tulis $D_g = \{x | x \neq 1, x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$.

Untuk menentukan daerah hasil fungsi g adalah sebagai berikut.

Pertama kita tulis $y = \dfrac{4x^2}{x^2 - 1}$ kemudian kita selesaikan untuk x.

$$y = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$y(x^2 - 1) = 4x^2$$

$$yx^2 - y = 4x^2$$

$$yx^2 - 4x^2 = y$$

$$x^2(y - 4) = y$$

$$x^2 = \frac{y}{y - 4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{y - 4}}$$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{y}{y - 4}}$ terdefinisi ketika:

(i) $y - 4 \neq 0$

$y \neq 4$

(ii) $\dfrac{y}{y - 4} \geq 0$

Kasus pertama agar $\dfrac{y}{y - 4} \geq 0$ adalah sebagai berikut.

- $y \geq 0$
- $y - 4 > 0$

  $y > 4$

Irisan $y \geq 0$ dan $y > 4$ adalah $y > 4$.

Kasus kedua agar $\frac{y}{y-4} \geq 0$ adalah sebagai berikut.

- $y \leq 0$
- $y - 4 < 0$

  $y < 4$

Irisan $y \leq 0$ dan $y < 4$ adalah $y \leq 0$.

Gabungan dari kasus pertama dan kasus kedua diperoleh $y \leq 0$ atau $y < 4$.

$\therefore$ Irisan dari (i) dan (ii) diperoleh daerah hasil fungsi $g(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$ adalah $R_g = \{y \mid y \leq 0 \text{ atau } y > 4, y \in \mathbb{R}\}$.

Setelah mengerjakan soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.13, bapak ibu guru menjelaskan tentang asimtot vertikal dan asimtot horizontal dari grafik $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ yang disediakan pada buku siswa. Gunakan Definisi 5.4 Dan 5.5 untuk memberikan pengertian secara umum dari asimtot vertikal dan asimtot horizontal. Bapak/Ibu guru dapat menjelaskan kepada peserta didik tentang cara menentukan asimtot vertikal dan asimtot horizontal dengan Contoh 5.14.

Berikan penjelasan kepada peserta didik bahwa beberapa fungsi rasional tidak memiliki asimtot vertikal ataupun asimtot horizontal tetapi memiliki asimtot miring. Bapak/Ibu guru dapat mengunakan Definisi 5.6 untuk memberikan pengertian secara umum dari asimtot miring. Sebagai contoh asimtot miring, Bapak/Ibu guru berikan penjelasan pada Contoh 5.14 bagian c, bahwa garis $y = x + 6$ bukan garis horizontal jadi fungsi *h* tidak memiliki asimtot horizontal, tetapi garis $y = x + 6$ merupakan asimtot miring fungsi *h*. Kemudian ajaklah peserta didik mengerjakan soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.14.

Mari, Mencoba 5.14

Alternatif Penyelesaian

a. Penyebut $x^2 - 16$ bernilai nol ketika $x = \pm 4$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut, sehingga garis $x = -4$ dan $x = 4$ adalah asimtot vertikal fungsi *f*. Jika nilai *x* mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai *f(x)* mendekati nol, sehingga asimtot horizontal fungsi *f* adalah sumbu X.

b. Penyebut $x + 2$ bernilai nol ketika $x = -2$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut, sehingga garis $x = -2$ adalah asimtot

vertikal fungsi *g*. Jika nilai *x* mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai *g(x)* tidak mendekati nol, maka kita ubah fungsi tersebut dengan menggunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3 \\ x+2 & 3x+7 \\ & \underline{3x+6} \; - \\ & \quad\;\; 1 \end{array}$$

Dari hasil pembagian bersusun tersebut dapat diperoleh $g(x)=3+\frac{1}{x+2}$. Jika nilai *x* mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai $\frac{1}{x+2}$ mendekati nol, maka fungsi *g(x)* akan mendekati 3. Sehingga garis $y = 3$ merupakan asimtot horizontal fungsi *g*.

c. Penyebut $x + 1$ bernilai nol ketika $x = -1$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut, sehingga garis $x = -1$ adalah asimtot vertikal fungsi *h*. Jika nilai *x* mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai *h(x)* tidak mendekati nol, maka kita ubah fungsi tersebut dengan menggunakan pembagian bersusun diperoleh.

$$h(x)=2x+9+\frac{6}{x+1}$$

Jika nilai *x* mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka $\frac{6}{x+1}$ nilai mendekati nol, maka fungsi *g(x)* akan mendekati $2x + 9$. Tetapi garis $y = 2x + 9$ bukan garis horizontal jadi fungsi *h* tidak memiliki asimtot horizontal, tetapi garis $y = 2x + 9$ merupakan asimtot miring fungsi *h*.

Peserta didik sudah mempelajari cara menentukan asimtot, pemahaman peserta didik tentang asimtot akan digunakan untuk menggambar grafik fungsi rasional. Bapak/Ibu guru ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 5.15, kemudian mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.15 secara berkelompok.

Mari, Mencoba 5.15

Alternatif Penyelesaian

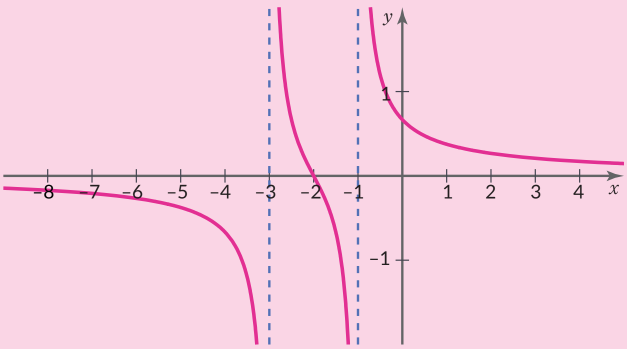
Untuk menggambar grafik *h* dapat kita lakukan langkah-langkah berikut.

1. Titik potong fungsi dengan sumbu X dapat ditentukan dengan $y = 0$. Titik potong grafik fungsi *h* dengan sumbu X adalah (−2,0).

2. Titik potong fungsi dengan sumbu Y dapat ditentukan dengan $x = 0$. Titik potong grafik fungsi h dengan sumbu Y adalah $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.
3. Penyebut $x^2 + 4x + 3$ bernilai nol ketika $x = -1$ dan $x = -3$ serta pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut, sehingga garis $x = -1$ dan $x = -3$ adalah asimtot vertikal fungsi h. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai $h(x)$ mendekati nol, sehingga asimtot horizontal fungsi h adalah sumbu X. Kita gambar asimtot-asimtot ini dengan menggunakan garis putus-putus.
4. Untuk memudahkan menggambar, kita dapat menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan yang memenuhi $h(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$.

x	-5	-4	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	1	2
$y = h(x)$	$-0,4$	$-0,7$	0,7	0	$-0,7$	0,7	0,4	0,3

5. Gambar grafik fungsi $h(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$



Bapak/Ibu guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan beri kesempatan peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat memperoleh jawaban yang benar dari soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan contoh 3.13, 3.14 dan 3.15 dengan tepat.

Pemahaman peserta didik tentang fungsi rasional akan digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual. Bapak/Ibu guru mengajak peserta didik untuk memperhatikan informasi yang disajikan pada kolom matematika dan sains. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk melakukan kegiatan eksplorasi.

Eksplorasi—Penerapan Fungsi Rasional

Alternatif Penyelesaian

a. Rumus gaya adalah sebagai berikut.

$$F = ma = m\frac{v}{t} = m\frac{s}{t^2}$$

Karena m = 1200kg, s = 30m dan x menyatakan waktu, maka fungsi besar gaya adalah $f(x) = \frac{36000}{x^2}$.

b. Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real kecuali 0 atau dapat di tulis $D_f = \{x | x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Untuk menentukan daerah hasil fungsi g adalah sebagai berikut.

Pertama kita tulis $y = \frac{36000}{x^2}$ kemudian kita selesaikan untuk x.

$x^2y = 36000$ — kalikan dengan x^2

$x^2 = \frac{36000}{y}$ — dibagi dengan y

$x = \sqrt{\frac{36000}{y}}$ — lakukan operasi akar

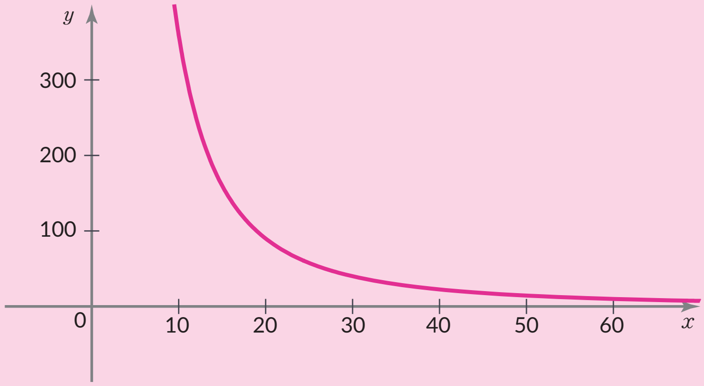
$x = \sqrt{\frac{36000}{y}}$ terdefinisi ketika y > 0, maka daerah hasil fungsi $f(x) = \frac{36000}{x^2}$ adalah $R_f = \{y | y > 0, y \in \mathbb{R}\}$.

c. Penyebut x^2 bernilai nol ketika x = 0 dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut, sehingga garis x = 0 adalah asimtot vertikal fungsi f. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai $f(x)$ mendekati nol, sehingga asimtot horizontal fungsi f adalah sumbu x. jadi fungsi f memiliki asimtot vertikal dan asimtot horizontal.

d. Pasangan berurutan yang memenuhi $f(x) = \frac{36000}{x^2}$.

x	10	20	30	40	50	120
$y=f(x)$	360	90	40	22,5	14,4	10

e. Karena x adalah waktu, dan waktu tidak mungkin bernilai negatif, maka gambar grafik fungsi $f(x) = \frac{36000}{x^2}$



f. Dari grafik tersebut terlihat bahwa semakin semakin besar gaya yang dikeluarkan maka waktu yang dibutuhkan akan semakin kecil bahkan hampir mendekati nol tetapi tidak akan pernah nol, sedangkan semakin besar waktu yang dibutuhkan maka gaya yang dikeluarkan akan semakin kecil bahkan hampir mendekati nol tetapi tidak akan pernah nol.

Mintalah beberapa kelompok untuk berbagi hasil diskusinya dan beri kesempatan untuk peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat penyelesaian kegiatan eksplorasi dengan tepat. Berikan penegasan bahwa selain pada bidang fisika penerapan fungsi rasional juga dapat kita jumpai pada bidang ekonomi, penerapan jarak, kecepatan dan waktu, serta pada bidang olahraga. Untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut peserta didik harus memahami definisi, daerah asal, daerah hasil, asimtot, dan grafik fungsi rasional.

c. Aktivitas 2

Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik mengenal fungsi akar dengan menggunakan teorema pythagoras, kemudian jelaskan Definisi 5.7. berikan penegasan bahwa pada pembahasan fungsi akar ini ruang lingkup bilangan yang dibahas adalah bilangan real. Bapak/Ibu guru mengajak setiap kelompok berdiskusi untuk melakukan kegiatan eksplorasi yang bertujuan untuk menentukan daerah asal fungsi akar.

Eksplorasi—Menentukan Daerah Asal Fungsi Akar

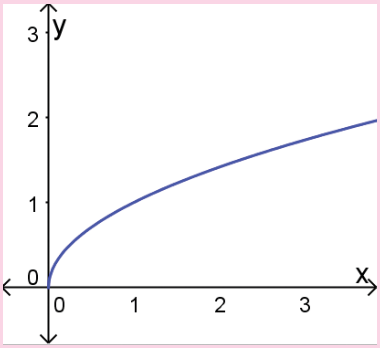
Alternatif Penyelesaian

- Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Pasangan beurutan yang memenuhi fungsi $f(x) = \sqrt{x}$

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = f(x)$	tidak terdefinisi	tidak terdefinisi	0	1	1,41	1,73

2. gambar grafik fungsi *f*.



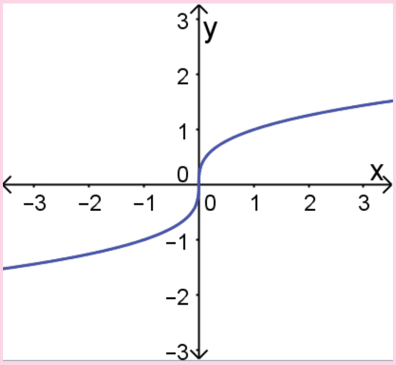
3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi *f* adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan nol atau dapat di tulis $D_f = \{x | x \geq 0, x \in R\}$.

- Fungsi $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

1. Pasangan beurutan yang memenuhi fungsi $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = g(x)$	−1,26	−1	0	1	1,26	1,44

2. gambar grafik fungsi g.



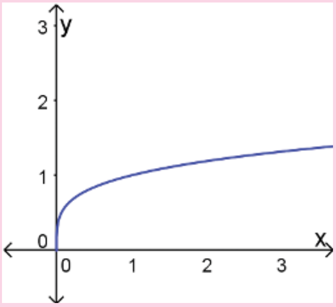
3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi *f* adalah himpunan semua bilangan real atau dapat di tulis $D_g = \{x | x \in \mathbb{R}\}$.

- Fungsi $h(x) = \sqrt[4]{x}$.

1. Pasangan beurutan yang memenuhi fungsi $h(x) = \sqrt[4]{x}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = h(x)$	tidak terdefinisi	tidak terdefinisi	0	1	1,19	1,32

2. gambar grafik fungsi *h.*



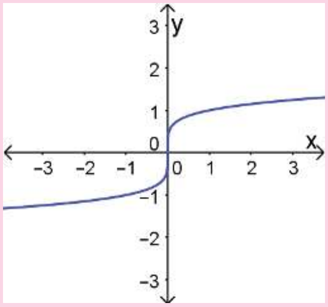
3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi *h* adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan nol atau dapat di tulis $D_h = \{x | x \geq 0, x \in R\}$.

- Fungsi $p(x) = \sqrt[5]{x}$.

1. Pasangan beurutan yang memenuhi fungsi $p(x) = \sqrt[5]{x}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = p(x)$	$-1{,}15$	-1	0	1	1,15	1,25

2. Gambar grafik fungsi *p.*



3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi *p* adalah himpunan semua bilangan real atau dapat di tulis $D_p = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

Dari fungsi *f, g, h,* dan *p,* diperoleh sebagai berikut

Jika diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ dengan *n* adalah bilangan bulat lebih dari 1, maka daerah asal fungsi *f* dapat kita peroleh sebagai berikut.

- Jika nilai n genap (n = 2, 4, 6, ...) maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x < 0$.
- Jika nilai n ganjil (n = 1, 3, 5, ...) maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real.

Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan yang mereka ketahui tentang menentukan daerah asal fungsi akar dengan tepat. Bapak/Ibu guru dapat memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik bahwa:

Jika diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ dengan n adalah bilangan bulat lebih dari 1, maka daerah asal fungsi f dapat kita peroleh sebagai berikut.

- Jika nilai n genap (n = 2, 4, 6, ...) maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$ yang tidak menyebabkan $g(x) < 0$.
- Jika nilai n ganjil (n = 1, 3, 5, ...) maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$.

Selanjutnya, ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 5.16. dan mengerjakan Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.16 secara berkelompok.

Mari, Mencoba 5.16

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi akar g mencakup semua bilangan real yang tidak membuat $x - 2$ sama dengan nol dan tidak menyebabkan $\frac{4}{x-2} < 0$. Untuk menentukan daerah asal fungsi g, hal yang dilakukan adalah sebagai berikut.

a. Menemukan pembuat nol dari $x - 2$

$x - 2 = 0$ pembuat nol $x - 2$

$x = 2$ Jumlahkan dengan 2

b. Menemukan penyebab $\frac{4}{x-2} < 0$.

$\frac{4}{x-2} < 0$ ketika $x < 2$.

Karena menyebabkan $x - 2$ sama dengan nol adalah $x = 2$ dan yang menyebabkan $\frac{4}{x-2} < 0$ adalah $x < 2$, maka daerah asal fungsi rasional g adalah himpunan semua bilangan real lebih dari 2 atau dapat di tulis $D_g = \{x | x > 2, x \in \mathbb{R}\}$. Daerah hasil fungsi g adalah $R_g = \{y | y > 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Setelah mengerjakan soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 5.16, Bapak/Ibu guru dapat menggunakan Contoh 3.17 untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik langkah-langkah menggambar grafik fungsi akar. Ajaklah peserta didik untuk mengerjakan mari mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 3.17 secara berkelompok.

Mari, Mencoba 5.17

Alternatif Penyelesaian

1) Grafik fungsi $g(x) = \sqrt{x} - 5$ dapat kita gambar dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

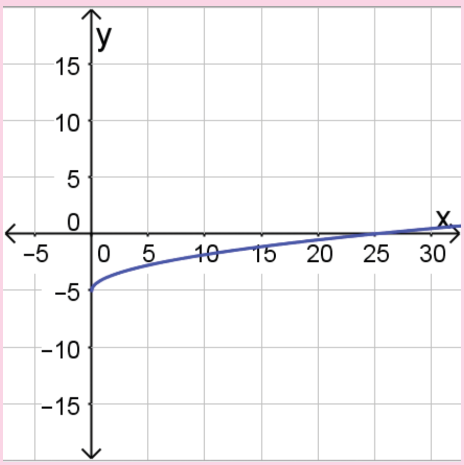
   Menentukan daerah asal fungsi *g*.

   i. Daerah asal fungsi akar *g* mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x < 0$, maka daerah asal fungsi rasional *g* adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan 0 atau dapat di tulis $D_g = \{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

   ii. Daerah asal fungsi *g*, dapat memudahkan kita menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(x, g(x))$ yang memenuhi $g(x) = \sqrt{x} - 5$.

x	0	1	4	9	16	25	36
$y = g(x)$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1

   Gambar grafik fungsi $g(x) = \sqrt{x} - 5$



2) Grafik fungsi $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$ dapat kita gambar dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

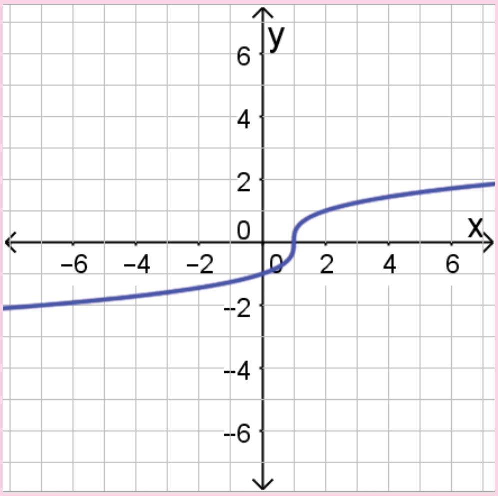
   i. Menetukan daerah asal fungsi *h*.

      Daerah asal fungsi akar *h* mencakup semua bilangan real atau dapat di tulis $D_h=\{x|x\in\mathbb{R}\}$.

   ii. Daerah asal fungsi *h* dapat memudahkan kita menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan (*x*, *h*(*x*)) yang memenuhi $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y = *h*(*x*)	−1,44	−1,26	−1	0	1	1,26	1,44

   iii. Gambar grafik fungsi $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$.



Bapak/Ibu guru dapat memandu diskusi ini agar dapat memperoleh jawaban yang benar dari soal Mari, Mencoba yang bersesuaian dengan contoh 3.16 dan 3.17 dengan tepat.

Pemahaman peserta didik tentang fungsi akar akan digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual. Bapak/Ibu guru dapat mengajak peserta didik untuk memperhatikan informasi yang disajikan pada kolom matematika dan sains. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk melakukan kegiatan eksplorasi.

Eksplorasi—Penerapan Fungsi Akar

Alternatif Penyelesaian

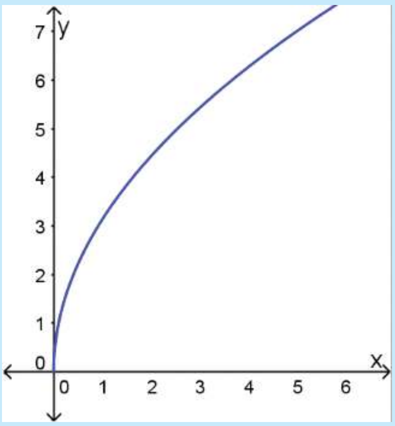
a). Jika f merupakan fungsi kecepatan tsunami dan x menyatakan kedalaman laut, maka $f(x) = \sqrt{9,8x}$.

b) Daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x < 0$. Maka daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan 0 atau dapat di tulis $D_f = \{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. Daerah hasil fungsi f adalah $R_f = \{y | y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

c) Daerah asal fungsi f, dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan (x, $f(x)$) yang memenuhi $f(x) = \sqrt{9,8x}$.

x	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	3,1	4,4	5,4	6,3	7

Gambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{9,8x}$



d. Interpretasi hasil pengamatan grafik fungsi f adalah semakin dalam kedalaman laut, maka semakin besar kecepatan tsunami.

e. $f(3000) = \sqrt{9,8(3000)} = 171,5$. Jadi kecepatan tsunami jika kedalaman laut adalah 3000m adalah 171,5*m/s*.

Pandulah diskusi ini agar dapat penyelesaian kegiatan eksplorasi dengan tepat. Berikan penegasan bahwa selain pada bidang fisika penerapan fungsi akar digunakan untuk memperkirakan jarak sebuah benda ke *horizon*. Untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut, peserta didik harus memahami definisi, daerah asal, daerah hasil, dan grafik fungsi akar.

d. Pendinginan

Pada kegiatan pendinginan, Bapak/Ibu guru dapat memandu peserta didik untuk mengulas kembali kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan dalam subbab Fungsi Aljabar dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan berikut.

- Apa yang kalian ingat tentang definisi fungsi rasional?
- Bagaimana cara menentukan daerah asal dan daerah fungsi rasional?
- Bagaimana cara menentukan asimtot fungsi rasional?
- Bagaimana langkah-langkah menggambar grafik fungsi rasional?
- Apa yang kalian ingat tentang definisi fungsi akar?
- Bagaimana cara menentukan daerah asal dan daerah fungsi akar?
- Bagaimana langkah-langkah menggambar grafik fungsi akar?

Selanjutnya, berikut ini soal yang dapat Bapak/Ibu guru gunakan sebagai evaluasi formatif di akhir pembelajaran yaitu soal nomor 1, 3 dan 7(poin a dan b) dalam Latihan C. Beri waktu 5 menit untuk peserta didik untuk menyelesaikannya.

Refleksi Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Fungsi Aljabar, mintalah peserta didik mengisi tabel pada bagian refleksi di buku siswa nomor 9-15.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

Salah. Pembilang dan penyebut tidak memiliki faktor persekutuan.

1. *Benar.*
2. *Benar.*
3. *Benar.*
4. *Salah.*

5. a) Daerah asal fungsi rasional *f* adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol, maka daerah asal fungsi rasional *f* adalah himpunan semua bilangan real kecuali −15 atau dapat di tulis $D_f = \{x | x \neq -15, x \in \mathbb{R}\}$. Untuk menentukan daerah hasil fungsi *f* adalah sebagai berikut.

Pertama kita tulis $y = \frac{7+x}{15+x}$ kemudian kita selesaikan untuk *x*.

y	=	$\frac{7+x}{15+x}$	persamaan fungsi rasional
$y(15+x)$	=	$7+x$	kalikan dengan $15x + x$
$15y + xy$	=	$7+x$	sifat distributif
$xy - x$	=	$7 - 15y$	jumlahkan dengan $-x - 15y$
x	=	$\frac{7-15y}{y-1}$	bagi dengan $y - 1$

$x = \frac{7-15y}{y-1}$ tidak terdefinisi ketika $y = 1$, maka daerah hasil fungsi $f(x) = \frac{7+x}{15+x}$ adalah $R_f = \{y | y \neq 1, y \in \mathbb{R}\}$

b) Daerah asal fungsi akar *h* mencakup semua bilangan real atau dapat di tulis . $D_h = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ Daerah hasil fungsi *h* adalah $R_h = \{y | y \in \mathbb{R}\}$

$p(x) = \frac{x^5 + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 3}$

6. Kita ubah fungsi tersebut dengan menggunakan pembagian bersusun diperoleh. $p(x) = x + 1 + \frac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 3}$

Jika nilai *x* mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga maka nilai $\frac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 3}$ mendekati nol, maka garis $y = x + 1$ merupakan asimtot miring fungsi *p*.

7. a) Model matematika dari fungsi biaya untuk *x* loyang kue brownis adalah $B(x) = 7000000 + 40000x$

b) Misalkan fungsi biaya rata-rata *B* untuk memproduksi *x* loyang kue brownis adalah fungsi Q, maka $Q(x) = \frac{7000000 + 40000x}{x}$

c) Grafik fungsi $Q(x) = \frac{7000000 + 40000x}{x}$ dapat kita gambar dengan langkah-langkah berikut.

i. Titik potong fungsi dengan sumbu *x* dapat ditentukan dengan $y = 0$. Titik potong grafik fungsi *Q* dengan sumbu *x* adalah (−175,0).

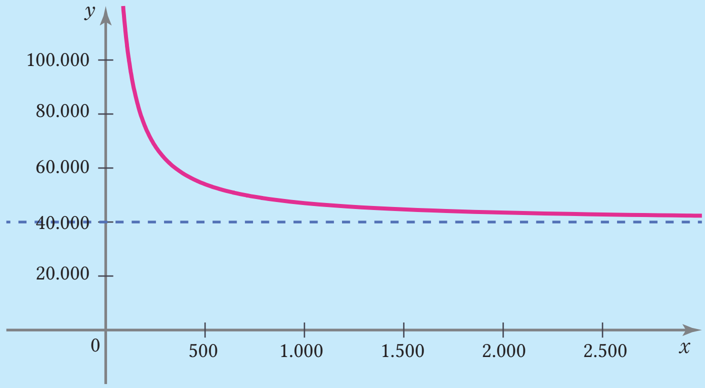
ii. Garis $x = 0$ adalah asimtot vertikal fungsi Q ,sedangkan asimtot horizontal fungsi Q adalah garis $y = 40000$. Kita gambar asimtot-asimtot ini dengan menggunakan garis putus-putus.

iii. Untuk memudahkan menggambar, kita dapat menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan yang memenuhi $Q(x) = \dfrac{7000000 + 40000x}{x}$

Karena x merupakan banyaknya produksi kue bronis, sehingga nilai x yang dipilih bernilai positif.

x	500	1000	1500	2000	2500	3000
$y = Q(x)$	54000	47000	44666,7	43500	42800	42333,3

iv. Gambar grafik fungsi $Q(x) = \dfrac{7000000 + 40000x}{x}$



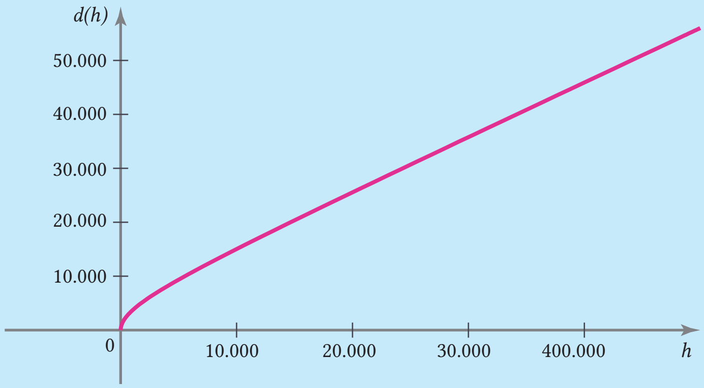
8. (a) fungsi jarak d (dalam km) ke horizon untuk sebuah benda yang berada pada ketinggian h km di atas permukaan bumi adalah $d(h) = \sqrt{(h + 6371)^2 - 6371^2} = \sqrt{h^2 + 12742h}$

b. Daerah asal fungsi akar d mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $h^2 + 12742h < 0$. Selain itu karena h merupakan ketinggian maka daerah asal fungsi rasional d adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan 0 atau dapat di tulis $D_d = \{h|\ h \geq 0, h \in \mathbb{R}\}$
Daerah hasil fungsi d adalah $R_d = \{y| y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

c. Memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(h,d(h))$ yang memenuhi $d(h) = \sqrt{h^2 + 12742h}$

h	0	10.000	20.000	30.000	40.000
$y = d(h)$	0	15.080,45	25.589,84	35.808,66	45.931,25

Gambar grafik fungsi $d(h) = \sqrt{h^2 + 12742h}$



$d(h) = \sqrt{h^2 + 12742h}$.= 3707,02. Jadi jarak benda ke *horizon* pada benda yang berada pada 1000km di atas permukaan bumi adalah 2707,02km.

b. Penugasan

Sebagai penugasan Bapak/Ibu guru dapat meminta peserta didik mengerjakan soal Latihan A pada nomor 2, 4, 5, 6, dan 8. Soal-soal tersebut memfasilitasi peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilannya dalam memahami konsep fungsi aljabar.

D. Panduan Pembelajaran: Fungsi Non Aljabar

1. Persiapan Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran di dalam subbab Fungsi Non-Aljabar dibagi menjadi empat aktivitas pembelajaran. Tujuan utama aktivitas pertama adalah untuk memandu siswa untuk memahami pemodelan matematika yang memanfaatkan konsep pertumbuhan maupun peluruhan secara eksponensial. Di aktivitas kedua, siswa diminta untuk menggunakan pengetahuannya tentang fungsi nilai mutlak untuk menyelesaikan beberapa permasalahan terkait. Di aktivitas ketiga, siswa diajak untuk memahami fungsi tangga dan penggunaannya dalam memodelkan suatu permasalahan dan menyelesaikannya. Di aktivitas keempat, siswa secara terbimbing dipandu untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang terkait dengan fungsi *piecewise*.

a. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab Fungsi Trigonometri, siswa diharapkan mampu untuk melakukan hal-hal berikut.

1. Menjelaskan konsep fungsi eksponensial, nilai mutlak, tangga, dan *piecewise* serta menganalisis karakteristik grafiknya.
2. Memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi eksponensial, nilai mutlak, tangga, dan *piecewise*.

b. Alat dan Bahan

- Kertas berpetak atau kertas gambar
- Visualisasi bagian Matematika dan Sains "Gelombang Pasut Menyelamatkan Kapal yang Tersangkut" (tidak wajib)
- Kalkulator grafik Desmos (tidak wajib)

c. Persiapan Guru

Pertanyaan-pertanyaan berikut sebaiknya dipikirkan terlebih dahulu sebelum memulai pembelajaran pada subbab Fungsi Non Aljabar.

- Bagaimana cara Anda menjembatani pengetahuan awal siswa tentang fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise untuk memodelkan beberapa fenomena?

- Bagaimana Anda menggunakan konteks-konteks dalam buku siswauntuk memehamai penerapan fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise?
- Miskonsepsi apa saja yang mungkin akan dilakukan siswa ketika mempelajari fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi *piecewise*?

2. Kegiatan Pembelajaran

a. Pemanasan

Di dalam kegiatan pemanasan, siswa diajak untuk mencermati dan memaknai definisi dari fungsi-fungsi yang dibahas di sini. Kegiatan ini bertujuan agar siswa mencermati karakteristik fungsi baik secara simbolik maupun grafik.

Kegiatan Di kegiatan pemanasan, Bapak/Ibu Guru dapat memulai dengan menampilkan beberapa definisi dari fngsi-fungsi yang dibahas di subbab ini. Ajaklah siswa untuk mendiskusikan tiap definisi fungsi. Berilah waktu kepada siswa untuk menggambarkan contoh dari fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise.

Kesimpulan Untuk menyimpulkan aktivitas pemanasan, siswa dapat diminta untuk menampilkan gambar grafik mereka. Mintalah beberapa siswa untuk menjelaskan beberapa persamaan atau perbedaan yang tampak pada beberapa grafik fungsi

.

b. Aktivitas 1

Untuk mengawali aktivitas ini, siswa dapat diajak untuk mengingat Kembali tentang ide-ide besar tentang fungsi eksponensial yang dipelajari di kelas 10. Setelah itu, bagilah siswa menjadi beberapa kelompok yang setiap kelompok terdiri dari 3 – 4 orang. Mintalah setiap kelompok tersebut tersebut mengerjakan aktivitas Mari Mencoba. Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, pantaulah pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.

Mari, Mencoba 5.18

Alternatif Penyelesaian Berdasarkan informasi dari soal, kita dapat memperoleh bahwa $j_0 = 50$ dan $t = 5$. Akibatnya, kita dapat menentujkan banyak bakteri pada menit ke 5 dengan menggunakan model fungsi eksponensial yang diberikan yakni $f(t) = 50(3)^5 = 50 \times 243 = 12150$.

Untuk memfasilitasi siswa membuat kesimpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjuklah kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban yang berbeda. Setelah presentasi, mintalah siswa lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut.

c. Aktivitas 2

Bapak/Ibu Guru dapat memulai Aktivitas 2 dengan mengajak siswa menyelidiki karakteristik fungsi nilai mutlak baik secara notasi simbolik maupun grafik di dalam bidang koordinat. Setelah itu, bagilah siswa menjadi beberapa kelompok dan tugaskan setiap kelompok untuk mengerjakan dua aktivitas Mari, Mencoba. Ketika siswa mengerjakan aktivitas tersebut, Bapak/Ibu Guru perlu berkeliling dari satu kelompok ke kelompok lainnya untuk memantau dan mendampingi pekerjaan setiap kelompok.

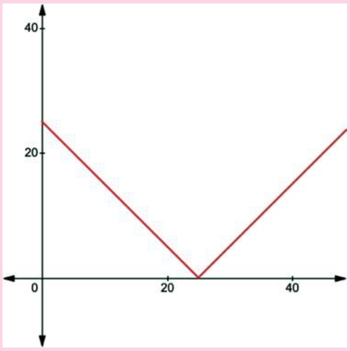
Mari, Mencoba 5.19

Alternatif Penyelesaian

1. Rudi menjauh dari rumah selama perjalanan. Di sisi lain, ia mendekat ke warung Padang dan kemudia menjauh.

Jarak Rudi ke rumah	0	10	20	25	30	40	50
Jarak Rudi ke warung Padang	25	15	5	0	5	15	25

2. Misalkan jarak Rudi ke rumahnya adalah x dan jarak Rudi ke warung Padang adalah y. Grafik dari hubungan keduanya dapat diilustrasikan sebagai berikut.



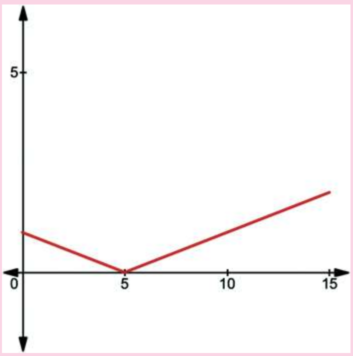
3. Fungsi yang dapat merepresentasikan hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai $f(x) = |x - 25|$. Namun, perlu diperhatikan bahwa nilai x hanya dibatasi untuk $0 \leq x \leq 50$.

Mari, Mencoba 5.20

Alternatif Penyelesaian

Karena titik puncaknya adalah (0,5), maka dengan subtitusi, kita peroleh $f(x) = a|x - 5| + 0$. Selanjutnya, karena (0,1) berada pada garis, maka kita peroleh $1 = a\,|0 - 5|$. Akibathya, nilai a adalah . Oleh karena itu, persamaan nilai mutlak yang diinginkan adalah $f(15) = \frac{1}{5}|x - 5|$.

Berdasarkan persamaan ini, kita dapat menentukan pada ketinggian berapa sinar lampu mencapai tembok dengan cara mensubstitusikan $x = 15$ ke dalam fungsi. Akibatnya, diperoleh $f(15) = \frac{1}{5}|15 - 5| = 2$.



Setelah setiap kelompok menyelesaikan pekerjaannya, Bapak/Ibu Guru selanjutnya memilih beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Setelah presentasi, ajaklah siswa mendiskusikan jawaban dari presenter tersebut. Peran Bapak/Ibu Guru di sini adalah mengarahkan diskusi agar berjalan secara produktif dan, jika perlu, meluruskan miskonsepsi atau kesalahan yang dialami siswa.

d. Aktivitas 3

Bapak/Ibu Guru dapat memulai aktivitas ketiga dengan menjelaskan apa yang dimaksud dengan fungsi tangga. Penjelasan dapat diambil dari buku siswa dan beberapa contohnya. Untuk penambahan dapat dielaborasi oleh Bapak/Ibu Guru.

Bapak/Ibu Guru selanjutnya dapat meminta siswa untuk berpasangan dan mengerjakan aktivitas Mari, Mencoba "Menemukan Identitas Trigonometri". Ketika siswa mengerjakan aktivitas eksplorasi ini, berkunjunglah ke bangku siswa untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.

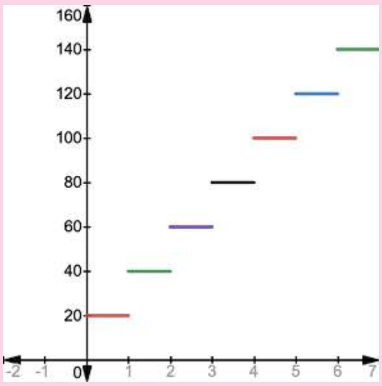
Mari, Mencoba 5.21

Alternatif Penyelesaian

1. Berdasarkan informasi pada soal, kita dapat mebuat tabel sederhana untuk jam dan besar biaya untuk menyewa *Playstasion* dalam ribu.

Jam	0	1	2	3	4	5	6	7
Biaya	0	20	40	60	80	100	120	140

2. Grafik dari permasalahan tersebut adalah sebagai berikut dengan x



Fungsi yang dapat merepresentasikan fenomena di atas adalah fungsi tangga yang dapat dinotasikan sebagai berikut: $f(x) = 20k, k-1 < x \leq k, k = 1,2,3\ldots.$

3. Untuk menentukan berapa jam Andi dapat menyewa *Playstasion* dengan uang 125 ribu, dapat dikalkulasikan dengan $20k \leq 125 \Leftrightarrow k \leq \frac{125}{20} = 6.25$. Karena k harus berupa bilangan bulat, maka nilai k paling besar adalah 6. Artinya, maksimal, Andi dapat menyewa selama 6 jam.

Setelah siswa menyelesaikan pengerjaannya, mintalah kelompok yang dianggap dapat memberikan jawaban yang berbeda. Selanjuitnya, ajaklah siswa-siswa lainnya untuk memberikan tanggapan dan pertanyaan. Setelah itu, Bapak/Ibu Guru perlu mengkonfirmasi jawaban yang tepat dari aktivitas eksplorasi tersebut.

e. Aktivitas 4

Untuk memulai kegiatan keempat, siswa dapat dikenalkan dengan definisi yang ada di buku siswa. Setelah itu, bagilah siswa menjadi beberapa kelompok untuk membahas definisi itu lebih lanjut dengan meminta mebuat beberapa contoh beserta grafiknya. mengerjakan aktivitas Mari, Mencoba. Selama siswa mengerjakan aktivitas tersebut, Bapak/Ibu Guru sebaiknya mengunjungi setiap kelompok untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.

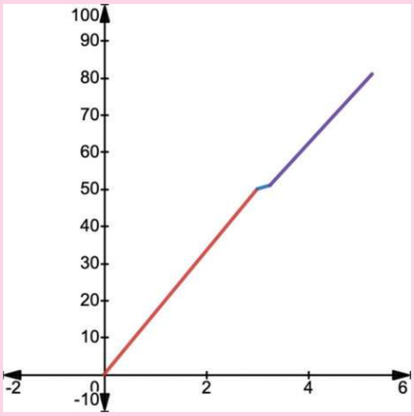
Mari, Mencoba 5.20

Alternatif Penyelesaian

1. Berikut ini adalah tabel

Kegiatan	Waktu tempuh	Jarak tempuh	Kecepatan
Sepeda	3 jam	50 km	50/3 km/jam
Renang	0,25 jam	1 km	4 km/jam
Lari	2 jam	30 km	15 km/jam

2. Grafik yang terkait adalah



3. Fungsi yang mendeskripsikan fenomena tersebut adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{50}{3}x, & 0 < x \leq 3 \\ 4x + 38, & 3 < x \leq 3.25 \\ 15x + 2.25, & 3.25 < x \leq 5.25 \end{cases}$$

Setelah siswa menyelesaikan pengerjaan bagian Mari, Mencoba, Bapak/ Ibu Guru dapat menunjuk salah satu siswa untuk mempresentaikan jawabannya dan meminta siswa-siswa lainnya untuk memberikan komentar. Jika hal ini tidak memungkinkan, karena keterbatasan waktu misalnya, bahaslah penyelesaian soal dari bagian Mari, Mencoba tersebut secara langsung.

f. Pendinginan

Untuk melakukan kegiatan pendingingan dalam pembelajaran subbab fungsi Non-Aljabar, Bapak/Ibu Guru dapat memandu siswa mengulas pembelajaran yang telah dialaminya. Salah satu caranya adalah dengan menanyakan beberapa pertanyaan berikut kepada siswa.

- Permasalahan-permasalahan apa saja yang dapat dimodelkan dengan fungsi Non-Aljabar?

Untuk mengetahui sejauh mana siswa memahami fungsi trigonometri, Bapak/ Ibu dapat meminta siswa untuk mengerjakan Latihan yang dipilih sehimngga dapat dikerjakan dalam waktu sekitar 5 menit bagi siswa untuk menyelesaikannya.

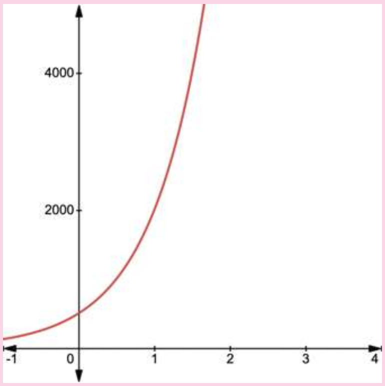
Refleksi Untuk melakukan refleksi terhadap pembelajaran dalam subbab Fungsi Non Aljabar, mintalah siswa mengisi tabel refleksi di buku siswa nomor 8-10.

3. Kegiatan Tindak Lanjut

a. Latihan

Alternatif Penyelesaian

1. Salah.
2. Benar
3. a) $500 \times 2^6 = 32000$ b) 500×2^{2t} c) $500 \times 2^{2\left(\frac{2}{3}\right)}$

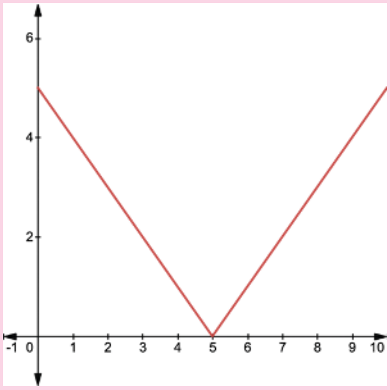


Estimasi waktu yang dibutuhkan adalah $\log_4 (200)$

4. a)

Jarak Made ke rumah	0	2,5	5	7,5	10
Jarak Made ke restoran Singkawang	5	2.5	0	2,5	5

b)

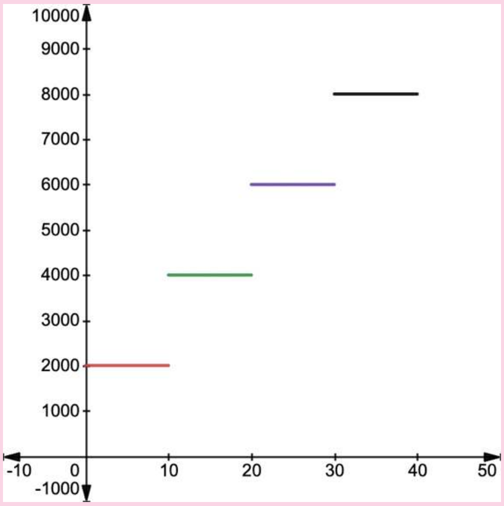


c) $f(x) = |x - 5|, 0 \leq x \leq 10$

4. a)

Menit	0	10	20	30	40
Biaya	0	2000	4000	6000	8000

b).



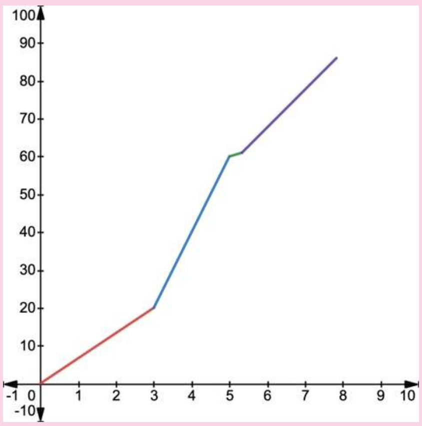
c) $f(x) = 2000k, 10(k-1) < x \leq 10k, k = 1, 2, 3...$

d) Lama penyewaan dengan uang 300 ribu adalah 150 menit yang mana kurang dari 5 jam, sehingga tidak cukup.

5. a)

Kegiatan	Waktu tempuh	Jarak tempuh	Kecepatan
Kayak	3 jam	20 km	20/3 km/jam
Sepeda	2 jam	40 km	20 km/jam
Renang	20/60 jam	1 km	3 km/jam
Lari	2,5 jam	25 km	10 km/jam

b)



c)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{20}{3}x, & 0\le x\le 3\\ 20x-40, & 3<x\le 5\\ 3x+45, & 5<x\le 7.5+\frac{1}{3}\\ 10x+\frac{23}{3}, & 5+\frac{1}{3}<x\le 7.5\frac{1}{3}\end{cases}$$

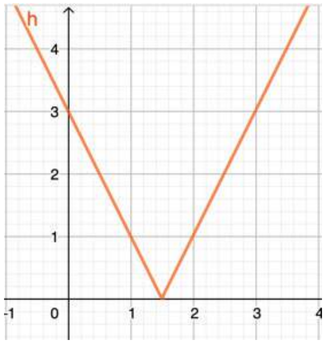
b. Penugasan

Sebagai tugas, Bapak/Ibu Guru dapat meminta siswa mengerjakan soal-soal Latihan. Soal-soal tersebut diharapkan dapat menjaga dan mengembangkan pengetahuan dan pemahaman siswa mengenai fungsi.

E. Alternatif Penyelesaian:

1. Uji Kompetensi

1. Benar.
2. Benar
3. Benar
4. Salah. Fenomena tersebut menggambarkan pertumbuhan secara linear.
5. 3/2; 8
6. Fungsi $f(x)=\log x^2$ memiliki daerah asal $\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}$ dan daerah hasil $\mathbb{R}$
7. $g(x)\ge 0$
8. $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ x, x>0\end{cases}$
9. tan 135° = −1, sin $(-120^o)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan cos $660^o\ \frac{1}{2}$.
10. $D_f=\{x|\,x\le 2\ dan\ x\ge 2, x\in R\}$.
11. Berikut grafiknya



12. Modelnya adalah $y = 15\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

13. Waktu yang diperlukan agar suhu kopi menjadi 75°C adalah $t = 20\log\left(\frac{75}{60-25}\right) \approx 6{,}62$ menit

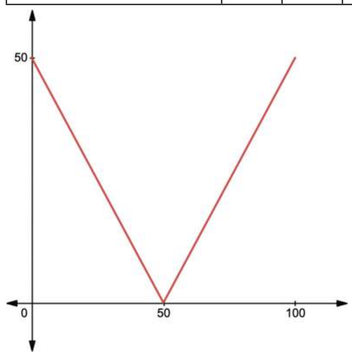
14. (a) Model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman untuk menempuh perjalanan pertama adalah $w_1 = \frac{25}{x}$.

    (b) Model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman untuk menyelesaikan setengah perjalanan selanjutnya adalah $w_2 = \frac{25}{x-15}$.

15. (a) Berikut tabelnya

Jarak Ketut dari garis strat	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Jarak Ketut ke fotografer	50	40	30	20	10	0	10	20	30	40	50

    (b)



    (c) $f(x) = |x - 50|, 0 \le x \le 100$

16. Pembuktian yang dilakukan oleh Aldo masih kurang tepat karena dia hanya membuktikan kebenaran persamaan hanya untuk tiga nilai *x*, yaitu 30°, 45°, dan 60°. Untuk menjadi identitas, persamaan tersebut harus berlaku untuk setiap kemungkinan nilai *x*.

17. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
{}^{a}\log\frac{a}{b} + {}^{b}\log\frac{b}{a} &= {}^{a}\log a - {}^{a}\log b + {}^{b}\log b - {}^{b}\log a \\
&= 2 - ({}^{a}\log b + {}^{b}\log a) \\
&= 2 - \left({}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b}\right)
\end{aligned}
$$

Karena $a, b > 1$ maka diperoleh ${}^{a}\log b > 0$ akibatnya, ${}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b} \ge 2$.

Jadi ${}^{a}\log\frac{a}{b} + {}^{b}\log\frac{b}{a} = 2 - \left({}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b}\right) \le 2 - 2 = 0$. Nilai terbesar ${}^{a}\log\frac{a}{b} + {}^{b}\log\frac{b}{a}$ dari adalah 0.

18. Yang pertama dilakukan adalah memfaktorkan pembilang dan penyebut fungsi rasional $f(x) = \frac{(x+3)^k(x^2-1)}{(x^2+2x-3)(x^2+4x+3)} = \frac{(x+3)^k(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)(x+3)(x+1)} = \frac{(x+3)^k}{(x+3)(x+3)}$ Perhatikan bahwa pembilang dan penyebut akan memiliki faktor yang sama untuk $k \geq 1$. Agar memiliki satu asimtot vertikal maka $k=1$.

19. Jika $a<1$ dan $x<y$, maka a^{x-y}. Akibatnya, $\frac{a^x}{a^y} < 1 \Longleftrightarrow a^x < a^y$. Oleh karena itu, $f(x)=a^x$ adalah fungsi naik jika $a>1$.

    Jika $0<a<1$ dan $x<y$, maka $a^{x-y}>1$. Akibatnya, $\frac{a^x}{a^y} > 1 \Leftrightarrow a^x > a^y$. Oleh karena itu, $f(x)=a^x$ adalah fungsi turun jika $a<1$.

    Jika $a=0$, maka $f(x)= a^x=0$ yang merupakan fungsi konstan nol.

2. Alternatif Penyelesaian: Proyek

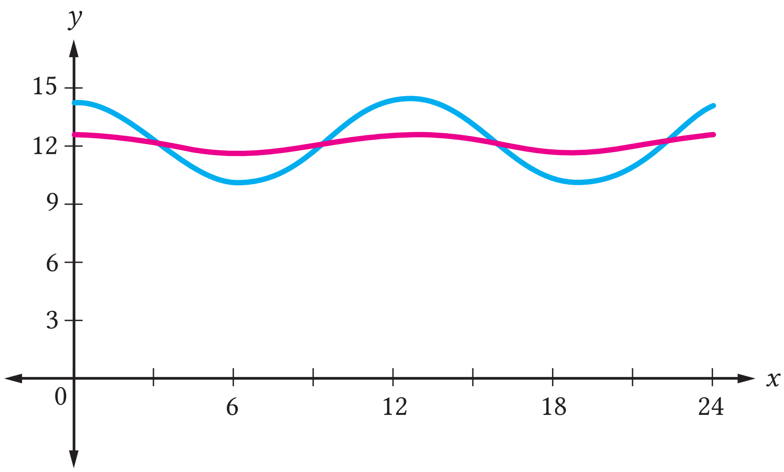
Variasi Lamanya Hari Denpasar dan Perth

1. Kota Denpasar direpresentasikan oleh grafik berwarna merah sedangkan Kota Perth direpresentasikan oleh grafik berwarna biru. Lama hari di Kota Perth lebih bervariasi daripada lama hari di Kota Denpasar karena jaraknya yang lebih jauh dari garis khatulistiwa.
2. Model dari peserta didik dapat bervariasi karena didasarkan pada perkiraan. Akan tetapi, model tersebut seharusnya mendekati model berikut.

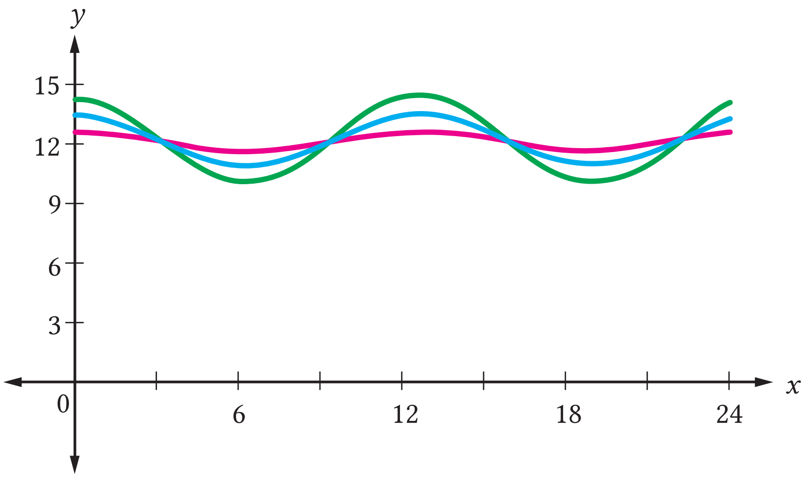
   Kota Denpasar: $y = 0{,}5 \cos(0{,}5x) + 12{,}1$

   Kota Perth: $y = 2{,}1 \cos(0{,}5x) + 12{,}2$

   Model tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



3. Karena Kota Karratha terletak di antara Kota Denpasar dan Kota Perth, maka amplitudo grafiknya juga di antara amplitudo grafik Denpasar dan Perth. Sketsa grafiknya ditunjukkan sebagai berikut.



Glosarium

aktivasi, fase pembelajaran ketika peserta didik menggunakan pengetahuan dan struktur yang telah dimilikinya untuk membangun pengetahuan baru.

aplikasi, fase pembelajaran ketika peserta didik mengaplikasikan pengetahuan atau keterampilannya untuk memecahkan masalah.

berpikir kritis, kemampuan memproses informasi secara objektif, menemukan koneksi antarinformasi yang diterima, menganalisis dan mengevaluasi informasi, serta menyimpulkan berdasarkan pertimbangan yang matang.

demonstrasi, fase pembelajaran ketika peserta didik memperoleh demonstrasi dari materi yang dipelajarinya.

desmos, salah satu platform atau layanan yang menawarkan berbagai bentuk sarana matematika, aktivitas matematika digital, dan kurikulum matematika.

gotong royong, kemampuan melakukan pekerjaan secara bersama-sama dan sukarela untuk mencapai tujuan tertentu.

integrasi, fase pembelajaran ketika peserta didik mengintegrasikan (atau mentransfer) pengetahuan atau keterampilan barunya ke permasalahan sehari-harinya.

jigsaw, salah satu jenis pembelajaran kooperatif yang mengatur agar setiap peserta didik di dalam suatu kelompok kecil mempelajari topik-topik yang berbeda sehingga pada akhirnya kelompok tersebut menguasai gabungan topik yang utuh.

kefasihan prosedural, pengetahuan tentang prosedur, kapan dan bagaimana menggunakan prosedur tersebut dengan tepat, dan keterampilan untuk melakukan prosedur tersebut secara fleksibel, akurat, dan efisien.

kreatif, kemampuan mengembangkan sesuatu yang orisinal, bermakna, bermanfaat, dan berdampak.

mandiri, sikap bertanggung jawab atas proses dan hasil belajarnya sendiri.

pelajar Pancasila, pelajar Indonesia yang menjadi pelajar sepanjang hayat, kompeten, berkarakter, dan berperilaku sesuai nilai-nilai Pancasila.

penilaian formatif, penilaian yang tujuan utamanya adalah untuk memantau pembelajaran peserta didik dan hasilnya dapat digunakan guru dan peserta didik untuk memperbaiki pengajaran dan pembelajaran.

penilaian sumatif, penilaian yang tujuannya adalah untuk mengevaluasi pembelajaran peserta didik yang dilakukan di akhir satuan pembelajaran tertentu dengan membandingkannya dengan standar tertentu.

pembelajaran kooperatif, pembelajaran yang menggunakan kelompok-kelompok kecil agar peserta didik dapat belajar bersama-sama dalam kelompok tersebut sehingga menghasilkan pengalaman belajar yang optimal.

pemahaman konseptual, pemahaman yang utuh terhadap ide-ide matematika.

profil pelajar Pancasila, sekumpulan kompetensi yang diperlukan oleh peserta didik untuk menjadi seorang Pelajar Pancasila.

siklus pengajaran, suatu siklus yang berisi tahapan-tahapan yang dapat digunakan oleh guru untuk melakukan pengajaran.

siklus pembelajaran, proses terurut yang dilalui oleh peserta didik selama mengalami pembelajaran.

quizizz, aplikasi untuk membuat permainan kuis interaktif yang dapat digunakan dalam pembelajaran.

Daftar Pustaka

Abramson, J. 2001. *Algebra and Trigonometry*. Texas: Rice University.

Abubakar, A. S., & Kaisupy, R. A. 2018. *Peran Kriptografi dalam Aplikasi WhatsApp*. Yogyakarta: Universitas Amikom Yogyakarta.

Andreescu, T.,, & Andrica, D. 2006. *Complex Numbers from A to..z*. United States of America: Birkhäuser USA.

Anton, H., & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra* (11^{th} ed.). Canada: Anton Textbooks, Inc.

Aufmann, R. N., Barker, V. C., & Nation, R. D. 2011. *College Algebra and Trigonometry* (7^{th} ed.). USA: Brooks/Cole Publishing Company.

Dedy, E., & Sumiaty, E. 2020. *Fungsi Variabel Kompleks*. Jakarta: Bumi Aksara

Duamairy. 2012. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.

Eric Balzarini et al. 2012. *Pre-Calculus 12*. McGraw-Hill Ryerson

Goode, S.W. 2000. *Differential Equations and Linear Algebra* (2^{nd} ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc

Holliday, Luchin, Cuevas, Carter, Marks, Day, Casey, & Hayek. 2008. *Algebra 2*. New York: Glencoe/McGraw-Hill.

Istiqomah. 2020. *Modul Matematika Peminatan Kelas XI KD 3.4*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2019. *Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2019. *Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2020. *Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2020. *Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kristanto, Y. D. 2016. *Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X*. Jakarta: Grasindo.

Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. 2017. *Aljabar dan Trigonometri*. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

Larson, R., & Falvo, D.C. 2009. *Elementary Linear Algebra* (6^{th} ed.). USA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Martin-Gay, E. 2013. *Intermediate Algebra* (6^{th} ed.). Boston: Pearson.

McAskill, B., Watt, W., Balzarini, E., Johnson, B., Zarski, C. 2012. *Pre-Calculus 12*. Canada: McGraw-Hill Ryerson Ltd.

Merrill, M. D. (2002). First principles of instruction. *Educational Technology Research and Development*, *50*(3), 43–59. https://doi.org/10.1007/bf02505024

Merrill, M. D. (2012). *First Principles of Instruction: Identifying and Designing Effective, Efficient, and Engaging Instruction.* Hoboken, NJ: Pfeiffer (John Wiley & Sons).

Morrison, K., & Hamshaw, N. 2015. *Cambridge IGCSE Mathematics Core and Extended Coursebook with CD-ROM.* Cambridge University Press.

National Research Council. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Purcell, E.J, dkk. 2007. *Calculus: 9th Edition.* Prentice Hall, Inc.

Rawuh. 1992. *Geometri Transformasi.* Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Smith, M.S., & Stein, M.K. 2018 . 5 *Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions* (2nd ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, M., Bill, V., & Raith, M. L. (2018). Promoting a Conceptual Understanding of Mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *24*(1), 36–43. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.24.1.0036

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stewart, James. 2012. *Calculus Early Transcendentals: 7th Edition.* United States of America: Brooks/Cole, USA,

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. 2020 . Calculus: early transcendentals, ninth edition. Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. 2016. *Algebra and Trigonometry* (4^{th} ed.). Boston: Cengage Learning.

Sukino. 2017. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib.* Jakarta: Erlangga.

Sufyadi, S., Harjatanaya, T. Y., Adiprima, P., Satria, M. R., Andiarti, A., & Herutami, I. (2021). *Panduan Pengembangan Projek Penguatan Profil Pelajar Pancasila.* Jakarta: Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi.

Thomas, G.B. 2010. *Calculus Early Transcendentals: 12th Edition.* New York: Addison-Wesley.

Voogt, J., & Roblin, N. P. (2012). A comparative analysis of international frameworks for 21^{st} century competences: Implications for national curriculum policies. *Journal of Curriculum Studies*, *44*(3), 299–321. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.668938

Sumber Laman

https://interaktif.kompas.id/baca/gizi-seimbang/."Gizi Seimbang dan Atlet." *Kompas.* Diakses pada 2 Juli 2021

https://www.citizenmath.com/lessons/going-once-going-twice Citizen Math. "Going Once, Going Twice: How much should you bid in an auction?" Diakses pada 11 Agustus 2021

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/56d8aee5637a85a2078c257d?collections=featured-collections,5e73b36a5141777627553357."Burning Daylight." Diakses pada 13 Agustus 2021

https://www.kompas.tv/amp/article/133356/videos/hari-ini-tsunami-aceh-pernah-terjadi-2004-silam-ini-fakta-dahsyatnya-bencana?page=2. Hariyanto dan Kurniawan. "Hari ini Tsunami Aceh Pernah Terjadi 2004 Silam, ini Fakta Dahsyatnya Bencana." Kompas TV. Diakses pada 19 Agustus 2021.

https://4.bp.blogspot.com/9udFJt5C3Ic/VWnJomVsjTI/AAAAAAAABKU/7etkVBbniYY/s1600/pengertian%2Bdan%2Bsejarah%2Bkriptografi.jpg. Diakses pada 29 Juni 2021.

https://corona.jogjaprov.go.id/. Diakses pada 2 Juli 2021

https://eatjoy.co.id/kandungan-gizi-daging-ayam-ras/. Diakses pada 5 Juli 2021

https://pixabay.com/id/photos/matriks-biner-keamanan-kode-2503236/.Diakses pada 5 Agustus 2021.

https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-Matriks-2014/konten2.html

https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/2/index.html Illustrative Mathematics. *Polynomial and Rational Functions*. Diakses pada 15 Juli 2021

https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/6/index.html "Illustrative Mathematics. Trigonometric Functions." Diakses pada 5 Juli 2021

https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-3/index.html Open Up Resources. "*Polynomial Functions*." Diakses pada 15 September 2021

https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-7/index.html Open Up Resources. "T*rigonometric Functions, Equations, and Identities*". Diakses pada 17 September 2021

https://bobo.grid.id/read/082135113/apakah-filosofi-batik-di-luar-pulau-jawa-sama-dengan-batik-yang-berasal-dari-jawa-yuk-cari-tahu?page=all. Rahmalia, I. *"Apakah Filosofi Batik di Luar Pulau Jawa Sama dengan Batik yang Berasal dari Jawa?"* Diakses pada 5 Juli 2021

https://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength. "*Password strength*." Diakses pada 13 Agustus 2021

Indeks

Profil Pelaku Perbukuan

Profil Penulis 1



Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
Email : alazhari.masta@upi.edu
Alamat Kantor : FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No.229, Kota Bandung, Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis

Riwayat Pekerjaan/Profesi

Dosen Program Studi S1 Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015 – sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S3: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2013 – 2018)
2. S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2011 – 2013)
3. S1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia (2007 – 2011)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku digital pusat perbukuan untuk Program kelas IV, V, VI (2019)
2. Buku Siswa Matematika SMA/ MA/ SMK kelas X. Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2020
3. Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK kelas X. Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2020

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Math Project (Pembelajaran Matematika Berbasis Pendekatan Saintifik) untuk kelas I SD, IV SD, VII SMP. Penerbit Yrama Widya Bandung pada tahun 2014.
2. Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK kelas X. Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2019
3. Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK kelas X. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud. tahun 2019

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

Hasil Penelitian selengkapnya dapat dengan id berikut.

Id Scopus	57189662322
Id Google Scholar	5cxkPMUAAAAJ
Id Sinta	6007709

Profil Penulis 2

Nama Lengkap : Yosep Dwi Kristanto, M.Pd.
Email : yosepdwikristanto@usd.ac.id
Instansi : Universitas Sanata Dharma
Alamat Instansi : Jl. Affandi, Mrican, Caturtunggal, Depok, Sleman, DIY
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2016 – sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S2: Program Pascasarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2013 – 2015)
2. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Malang (2008 – 2012)

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Metode Statistik: Jilid 1 (2021)
2. Metode Statistik: Jilid 2 (2021)
3. Super Modul Matematika SMP/MTs Kelas VII, VIII, IX (2018)
4. Aljabar dan Trigonometri (2017)
5. Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X (2016)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. Towards a mathematics textbook for supporting 21st century learning: The student perspective (2020)
2. Using network analysis for rapid, transparent, and rigorous thematic analysis: A case study of online distance learning (2020)
3. Listening to the student voice on emergency remote teaching during the pandemic crisis (2020)
4. Development and validation of a test instrument to measure pre-service mathematics teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge
5. Technology-enhanced pre-instructional peer assessment: Exploring students' perceptions in a Statistical Methods course (2018)

Portofolio selengkapnya dapat dilihat di laman http://people.usd.ac.id/~ydkristanto/.

Profil Penulis 3

Nama Lengkap : Elyda Yulfiana, S.Pd.
Email : elydayulfiana@gmail.com
Instansi : SMA Negeri 7 Yogyakarta
Alamat Instansi : Jl. MT. Haryono No.47, Suryodiningratan, Kec. Mantrijeron, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta
Bidang Keahlian : Guru Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Guru matematika di SMP Negeri 2 Jetis Bantul (2016)
2. Guru matematika di SMA Negeri 7 Yogyakarta (2018 – sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Pendidikan Profesi Guru/ Universitas Sanata Dharma Yogyakarta (2018)
2. S1: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan/ Pendidikan Matematika/ Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta (2012 - 2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit

Yulfiana, E. (2018). Jalan Menuju Guru yang Mencintai Anak Didik dan Murah Hati. In Eko Budi Santoso (Ed.), Jalan Menuju Guru Matematika yang Mencintai Anak Didik dan Profesinya (pp. 77-86). Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

Tidak ada.

Profil Penulis 4



Nama Lengkap : Muhammad Taqiyuddin
Email : taqimathed@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Asisten Dosen, 2020-2021
2. Guru Matematika Sekolah Menengah, 2016-2019

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S3, 2021-Sekarang, Pendidikan Matematika, University of Auckland, Selandia Baru
2. S2, 2019-2021, Pendidikan Matematika, University of Georgia, Amerika Serikat
3. S1, 2012-2016, Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung

Judul Buku dan Tahun Terbit

Tidak ada

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

[Google Scholar ID: 6drbwHQAAAAJ]

1. Pre-service teachers' operative and figurative actions: The case of one-variable inequality (2021)
2. Analisis buku matematika kurikulum 1975 dan kurikulum 2013 (2020)
3. A Note on Inclusion Properties of Weighted Orlicz Spaces (2020)
4. Analisis Buku Matematika Sekolah Menengah Atas Pada Topik Turunan (2019)
5. Telaah buku matematika Indonesia pada topik pertidaksamaan matematika (2018)
6. Inclusion properties of Orlicz spaces and weak Orlicz spaces generated by concave functions (2018)
7. Analysis of junior high school students' attempt to solve a linear inequality problem (2017)
8. Miskonsepsi siswa sekolah menengah pertama pada topik pertidaksamaan linear satu variabel (2017)

Profil Penelaah 1



Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd
Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Akun Facebook : –
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember,
Jl. Kalimantan nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (1983 – sekarang)
2. Dosen Penguji Disertasi S3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya (2016 – sekarang)
3. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007 –2016)
4. Ketua Tim Pengembangan Kurikulum Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (2006)
5. Guru Matematika di SMA (1981 – 1985)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya tahun 1999
2. S2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1992
3. S1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X (2019)
2. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas X (2021)
3. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII (2018) (Editor)
4. Matematika Fisika 1 (2018)
5. Matematika Fisika 2 (2018)
6. Strategi Belajar Mengajar IPA (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi dan Fungsi (2018)
2. Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang (2014)
3. Strategi Belajar Mengajar Matematika (2012)
4. Model of Teaching and Learning (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:

https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193683524.

Profil Penelaah 2

Nama Lengkap : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Email : kiki@sci.ui.ac.id
Instansi : Universitas Indonesia
Alamat Instansi : Kampus UI Depok, 16424
Bidang Keahlian : Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi

Dosen UI, 1986- sekarang

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S1: Matematika UI, 1985
2. S2: Matematika ITB, 1987
3. S3: Matematika, Federation University (a/n Univ. of Ballarat), Australia, 2006

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Teori Graf dan Aplikasinya, 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Sugeng, K.A., Silaban, D.R., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Local inclusive distance vertex irregular graphs, Mathematics, 9 (14) (2021), 1673
2. Lu, J., Peng, J., Chen, J., Sugeng, K.A., Prediction method of autoregressive moving average models for uncertain time series , International Journal of General Systems , 49(5) (2020), pp. 546–572
3. Septiyanto, F. Sugeng, K.A., Rainbow connection number of generalized composition, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17(1) (2020), pp. 367–372
4. Utami, B., Sugeng, K.A., Utama, S., On inclusive d-distance irregularity strength on triangular ladder graph and path, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics , 17(3)(2020), pp. 810–819
5. Judul lain dapat dilihat di:
   - https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=12797262400
   - https://scholar.ui.ac.id/en/persons/kiki-ariyanti

Profil Ilustrator



Nama Lengkap : Yol Yulianto
Email : yolyulianto@gmail.com
Instansi :
Alamat Instansi : Taman Rembrandt Blok R.04 No.88
Citra Raya Tangerang
Bidang Keahlian : Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Ilustrator Majalah Anak Ina, tahun 1998-2000
2. Ilustrator Majalah Ori-Kompas Gramedia, tahun 2001-2010
3. Ilustrator Majalah Superkids Junior, tahun 2011-2014
4. Ilustrator Freelance, tahun 2015-sekarang

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. SD Negeri Panggung 1 Semarang tahun belajar 1979-1985
2. SMP Negeri 3 Semarang tahun belajar 1985-1988
3. SMA Negeri 1 Semarang tahun belajar 1988-1991
4. FT Arsitektur Undip Semarang tahun belajar 1991-1996

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Rumah Ajaib, Penerbit Elaxmedia Komputindo, tahun 2009
2. Karnaval Loli, Penerbit Elaxmedia Komputindo, tahun 2009
3. Seri Buku Stiker Kolase, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2010
4. Cerita Rakyat Nusantara. Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2012
5. Siri Cerita Berirama, Penerbit PTS Malaysia, tahun 2016
6. Seri Komilag , Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2016-2017
7. Seri Aku Anak Cerdas, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2018
8. Seri 60 Aktivitas Anak, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2019
9. Seri Tangguh Bencana, Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2019

Penghargaan

1. Juara Pertama Lomba Komik Departemen Agama tahun 2004
2. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Pidie Jaya tahun 2017
3. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Mamasa tahun 2017
4. Lima karya terbaik Lomba Maskot Germas tahun 2018
5. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Bitung tahun 2019
6. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Manado tahun 2019

Profil Penyunting

Nama Lengkap : Seni Asiati, M.Pd
Email : seniasiatibasin@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : Jalan Gereja Tugu Semper Jakarta Utara
Bidang Keahlian : Penulis dan editor

Buku yang Pernah Ditelaah, Direviu, Dibuat Ilustrasi, dan/atau Dinilai (10 Tahun Terakhir):

1. Editor Buku Teks Pelajaran Seni Budaya Kelas VII, VIII Puskurbuk Kemendikbud (2013 dan 2017)
2. Editor Buku Teks Pelajaran Prakarya Kelas VII Puskurbuk Kemendikbud (2013)
3. Editor Buku Teks Pelajaran PJOK Kelas VII dan VIII Puskurbuk Kemendikbud (2013 dan 2017)
4. Editor Buku Tematik SD Kelas II dan Kelas V Puskurbuk Kemendikbud (2015)
5. Editor Buku Teks Psikologi Lansia Kelas X Puskurbuk kemendikbud (2019)
6. Editor Buku Guru Seni Musik Kelas IV dan kelas VII (2020)

Profil Penata Letak

Nama Lengkap : suhardiman
Email : aksanst@outlook.com
Instansi : -
Alamat Instansi :
Bidang Keahlian : Desain Grafis

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. 1998 – 2002 Ragam Offset Bandung
2. 2002 – sekarang *Freelancer*

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

D3 : Teknik Komputer IAI-LPKIA Bandung